[4] M. Einsiedler, A. Katok, E. Lindenstrauss. *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*. Ann. of Math. (2) 164 (2006), no. 2, 513–560.

[5] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss. *On measures invariant under diagonalizable actions: the rank-one case and the general low-entropy method*. J. Mod. Dyn. 2 (2008), no. 1, 83–128.

[6] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, and A. Venkatesh. *Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields*. To appear, Annals of Math.

[7] M. Einsiedler, T. Ward. *Arithmetic Quantum Unique Ergodicity for* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. http://math.arizona.edu/~swc/aws/10/2010EinsiedlerNotes.pdf

[8] E. Lindenstrauss. *Pointwise theorems for amenable groups*. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 5 (1999), 82–90 (electronic).

[9] E. Lindenstrauss. *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*. Ann. of Math. (2) 163 (2006), no. 1, 165–219.

Prof. Dr. Manfred Einsiedler, ETH Zürich,
Departement Mathematik, Rämistraße 101, 8092 Zürich
manfred.einsiedler@math.ethz.ch

Manfred Einsiedler hat 1999 in Mathematik an der Universität Wien promoviert. Schwerpunkt seines Studiums war die Theorie der mehrparametrischen Dynamik. Von 2001 bis 2009 arbeitete er an mehreren Universitäten (Penn State University, Washington State University, Princeton University, Ohio State University) in den USA. 2009 kehrte Manfred Einsiedler nach Europa zurück, um eine Professor an der ETH Zürich anzutreten.

Eine Fields-Medaille für Cedric Villani

Felix Otto

Cedric Villani (Foto: Pierre Maraval)

Angefangen mit der Dissertation über die Habilitation bis hin zu der Arbeit, für die Cedric Villani mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde, zieht sich *ein* Thema wie ein roter Faden durch die meisten seiner Veröffentlichungen: Was ist der Ursprung und das Wesen von Reibung in Flüssigkeiten, Gasen und Plasmen? Diese Frage ist gleichsam von philosophischem Interesse: Obwohl die einzelnen Partikel, z. B. Gasmoleküle oder Elektronen, der zeitumkehrbaren Newton'schen Mechanik (oder gar der Quantenmechanik) genügen, verhält sich das gesamte Medium effektiv so, als wäre die Zeit nicht umkehrbar. Zum Beispiel streben räumlich lokal gemittelte Größen, etwa die Geschwindigkeitsverteilung, einem Gleichgewicht entgegen. Aus mathematischer Sicht stellt sich die Frage wie folgt: Wie entsteht aus einem zeitumkehrbaren (riesigen) System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ein effektiv irreversibles Verhalten für gemittelte Größen? Die mathematische Phantasie und hartnäckige Konsequenz, mit der sich Villani dieser Fragestellung widmet, hat mich schon beeindruckt, als ich ihn kurz nach seiner Promotion kennenlernte.

Die Boltzmanngleichung und der Trend zum Gleichgewicht

Ein fundamentales Modell, anhand dessen Villani diese Frage studiert hat, ist durch die Boltzmanngleichung gegeben. Die Boltzmanngleichung liegt auf halbem Wege zwischen den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Fluidpartikel und den Navier-Stokes-Gleichungen für viskose Fluide. In Letzteren ist die Reibung (d. h. innere Reibung oder Viskosität) und damit die Irreversibilität und der Trend zum Gleichgewicht explizit eingebaut.

Zunächst scheint es so, als wäre die Boltzmanngleichung ein getreues Abbild der Newton'schen Mechanik – nur auf einer anderen Beschreibungsebene: Statt den Zustand durch die Positionen $\{X_i\}_{i=1,\cdots,N}$ und die Geschwindigkeiten $\{V_i\}_{i=1,\cdots,N}$ der (idealisiert kugelförmigen und identischen) $N \gg 1$ Teilchen zu beschreiben, wird der Zustand durch eine Anzahldichte $F(t,x,v)\,dx\,dv$ im Phasenraum von Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ beschrieben: Durch Integration der Dichte $\int_A F(t,x,v)\,dx\,dv$ erhält man also die Gesamtzahl der Teilchen zu einem Zeitpunkt t mit Position und Geschwindigkeit in einer Teilmenge A des Phasenraums. Die Boltzmanngleichung hat die einfache Form:

$$\partial_t F(t,x,v) + v \cdot \nabla_x F(t,x,v) = Q\big(F(t,x,\cdot), F(t,x,\cdot)\big)(v). \quad (1)$$

Da die Zeitableitung von $F(t, x + tv, v)$ durch $(\partial_t F)(t, x + tv, v) + v \cdot (\nabla_x F)(t, x + tv, v)$ gegeben ist, drückt der Differentialoperator auf der linken Seite von (1) gerade aus, dass v die Geschwindigkeitsvariable ist. Die rechte Seite von (1) beschreibt den Effekt von Stößen zwischen zwei Teilchen: Ein Teilchen ändert durch die Kollision mit einem anderen Teilchen am Ort x zum Zeitpunkt t seine ursprüngliche Geschwindigkeit v – ein „Verlustterm" Q_- in der Gleichung. Im Gegenzug erwerben andere Teilchen durch Stoß die Geschwindigkeit v – ein „Gewinnterm" Q_+. Die Schreibweise soll andeuten, dass der Kollisionsoperator $Q = Q_+ - Q_-$ somit ein bilinearer Audruck ist, der explizit auf die v-Variable wirkt. Entscheidend für die Nähe zur Newton'schen Mechanik ist, dass im Kollisions-Operator Q nicht mehr Physik enthalten ist als die mikroskopische Information über elastische Stöße zwischen zwei Teilchen, wie sie durch die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Die genaue Form von Q hängt z. B. bei unendlich harten kugelförmigen Teilchen – man denke an Billiardkugeln – nur vom Radius der Teilchen ab. Insbesondere berücksichtigt Q die Erhaltung der Gesamtzahl, des Gesamtimpulses und der Gesamtenergie der kollidierenden Teilchen, was sich darin ausdrückt, dass für eine Lösung F von (1) die Integrale $\int F\,dx\,dv$, $\int vF\,dx\,dv$ und $\int |v|^2\,dx\,dv$ nicht von t abhängen.

Umso erstaunlicher ist es, dass diese einfach zu formulierenden Gleichungen bereits irreversibel sind: Boltzmann entdeckte 1872, dass die sogenannte Entropie $H := \int (\ln F) F\,dx\,dv$ (ein Ausdruck, der zugleich eine statistische Interpretation als *negativer* Logarithmus der Anzahl der Mikrozustände hat) mit der Zeit abnimmt – sogar strikt abnimmt, solange F keine Gaußverteilung in v ist, die in diesem Zusammenhang auch Maxwell'sche Verteilungsfunktion genannt wird. In der Tat ist die Boltzmanngleichung eine gewaltige Reduktion der Newton'schen Teilchenbewegung: Um Letztere vollständig zu erfassen, müsste man auch die Anzahldichte von Teilchen*paaren*, *-tripeln* u. s. w. berücksichtigen, und erhielte eine gekoppelte, wenn auch lineare, Hierarchie von Gleichungen. Die Boltzmanngleichung ersetzt die Paardichte durch das Produkt der Einteilchendichten F und vernachlässigt damit die Korrelationen, die durch Stöße entstanden sind – so schleicht sich die Irreversibilität in das Modell ein. Andererseits kann man zeigen, dass die Vernachlässigung der Korrelationen keine schlimme Vereinfachung ist: Bei dekorrelierten Anfangsdaten verschwinden die über die Zeit entstehenden Korrelationen im Limes $N \uparrow \infty$; dies wird als „Propagation des molekularen Chaos" bezeichnet.

Eine der ersten Fragen, mit der sich Villani (in Zusammenarbeit mit Laurent Desvillettes) auseinandergesetzt hat, ist folgende: Die Beobachtung von Boltzmann legt nahe, dass sich $F(t, x, v)$ für $t \to \infty$ der Gestalt

$$\frac{\rho(x)}{\sqrt{2\pi k T(x)}^3} \exp\left(-\frac{|v - u(x)|^2}{2kT(x)}\right)$$

annähert. Hier beschreiben $\rho(x)$, $u(x)$ und $T(x)$ die lokal um den Raumpunkt x gemittelten Größen, nämlich die Dichte, die Geschwindigkeit bzw. die absolute Temperatur; k steht für die Boltzmannkonstante. Die einzige stationäre Lösung von (1) ist jedoch

$$\frac{\rho}{\sqrt{2\pi k T}^3} \exp\left(-\frac{|v - u|^2}{2kT}\right),$$

wobei die *Konstanten* $\rho > 0$, $u \in \mathbb{R}^3$ und $T > 0$ über die Erhaltungsgrößen durch die Anfangsdaten $F(t = 0, x, v)$ bestimmt sind. Bei periodischen Randbedingungen in x oder bei einem begrenzenden äußeren Potential konnte Villani beweisen, dass $F(t, x, v)$ für $t \to \infty$ fast *exponentiell* gegen diese stationäre Lösung konvergiert. Das zu lösende Problem hierbei war: Warum führt der Trend zum Gleichgewicht, der eigentlich nur auf die Variable v wirkt, auch zu einem Gleichgewicht in der Variablen x? In seiner Antwort hat Villani einen Bezug zum Hörmander'schen Begriff der Hypoelliptizität hergestellt: Entscheidend ist, dass der Kollisions-Operator Q und der Transportoperator $v \cdot \nabla_x F$ in (1) *nicht* kommutieren. In der Folge hat Villani einen Kalkül, von ihm „Hypokoerzivität" genannt, entwickelt, der ausgehend von den einzelnen Komponenten des Evolutionsoperators und deren Kommutatoren ein Skalarprodukt konstruiert, bezüglich dessen der Evolutionsoperator koerziv ist.

Es sei erwähnt, dass die Behandlung der Boltzmanngleichung und deren Beziehung zu den Navier-Stokes-Gleichungen (vor allem durch die französische Schule, beginnend mit Pierre-Louis Lions, dem Fields-Medallien-Träger und Doktorvater von Villani, und jüngst zum Beispiel durch Laure Saint-Raymond) zu einer Blüte in den nichtlinearen Partiellen Differentialgleichungen geführt hat: Vom Konzept der renormalisierten Lösungen (Welchen rigorosen Sinn gibt man einem *quadratischen* Ausdruck wie $Q(F, F)$, wenn man nur $\int (\ln F) F\,dx\,dv$ kontrolliert?), über die Verträglichkeit von Oszillationen mit Nichtlinearitäten (z. B. hochfrequente Schallwellen und der Konvektionsterm in den Navier-Stokes-Gleichungen), bis zu neuartigen a-priori-Abschätzungen für Geschwindigkeitsmomente wie $\int vF\,dv$, wobei F einer inhomogenen Transportgleichung $\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \nabla_v G$ genügt ("velocity averaging").

Vlasov-Poisson-Gleichungen und Landau-Dämpfung

Villani hat die Fields-Medaille für die gemeinsame Arbeit zur Landau-Dämpfung mit seinem ehemaligen Schüler Clément Mouhot erhalten. Auch hier geht es um effektive Irreversibilität ausgehend von reversiblen Gleichungen, diesmal aber um ein Plasma von z. B. gleichgeladenen Teilchen, die nicht im engeren Sinne kollidieren, sondern über das Coulombpotential u interagieren. Wie bei der Boltzmanngleichung beschreibt man den Zustand über die Einteilchen-Anzahldichte $F(t,x,v)\,dx\,dv$ im Phasenraum. Die Dichte im physikalischen Raum $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} F(t,x,v)\,dv$ bestimmt das Coulombpotential über $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|}(\rho(t,y) - \rho_0)\,dy$, wobei ρ_0 eine gegebene Ladungsdichte des Hintergrunds ist. Die Gleichungen lauten nun

$$\partial_t F(t,x,v) + v \cdot \nabla_x F(t,x,v) = \nabla_x u(t,x) \cdot \nabla_v F(t,x,v). \quad (2)$$

Man beachte, dass (2) gerade die Liouvillegleichung zur Bewegungsgleichung eines Teilchens im Potential u ist:

$$\frac{dX}{dt}(t) = V(t), \quad \frac{dV}{dt}(t) = -\nabla u(t, X(t))\,.$$

Im Gegensatz zur Boltzmanngleichung (1) sind die Vlasov-Poisson-Gleichungen daher tatsächlich reversibel, d. h. invariant unter der Transformation $t \rightsquigarrow -t, v \rightsquigarrow -v$. Sie sind sogar formal von Hamilton'scher Gestalt. Umso erstaunlicher ist es, dass in diesen Gleichungen eine effektive Dämpfung auftritt, wie von Landau 1946 vermutet und analysiert. Dank der Arbeit von Villani und Mouhot lässt sich diese kontrovers diskutierte Beobachtung von Landau rigoros auf den Punkt bringen. Das lässt sich am besten erklären, wenn man periodische Randbedingungen in x annimmt, also $\mathbb{R}^3$ durch den Torus $\mathbb{T}^3$ ersetzt. Jede nur von v abhängende Dichte $F^*(v)$ ist ein stationärer Punkt von (2); für sie sind ρ und damit u konstant. Gewisse stationäre Dichten $F^*(v)$, wie zum Beispiel hinreichend breite Gaußverteilungen, haben folgende Stabilitätseigenschaft: Wird die Dichte anfänglich leicht gestört, d. h. $F(t=0,x,v) \approx F^*(v)$, dann konvergiert F für $t \to \infty$ wieder gegen eine räumlich homogene Verteilung $F^{**}(v)$. Diese Konvergenz ist nur schwach, d. h. $F(t,x,v)$ oszilliert zunehmend in v, allerdings stark auf der Ebene der räumlichen Dichten ρ und des Potentials u: Beide konvergieren punktweise gegen eine Konstante, das elektrische Feld $-\nabla u$ wird somit gedämpft. Der scheinbare Widerspruch zur Zeitumkehrbarkeit der Evolution von F ist keiner, da die Konvergenz auf der Ebene von F nur schwach ist. In der Tat enthält der in v oszillierende Anteil von $F(t,x,v)$ alle Informationen über die Anfangsdaten $F(t=0,x,v)$, die z. B. mittels einer Störung durch einen kurzen Impuls auch wieder makroskopisch sichtbar gemacht werden können („Echo"-Experiment von Malmberg et al. 1968).

Landau hat diesen nach ihm benannten Dämpfungseffekt auf der Ebene der *Linearisierung* von (2) nachgewiesen: Infinitesimale Störungen von geeigneten $F^*(v)$ konvergieren in obigem Sinne gegen Null. Allerdings hat die Linearisierung keine Hamilton'sche Gestalt mehr, so dass der Schritt von linearer zu nichtlinearer Dämpfung auch konzeptionell wesentlich ist. Caglioti & Maffei haben 1998 gezeigt, dass es tatsächlich Lösungen der eindimensionalen *nichtlinearen* Gleichung gibt, die diese Dämpfung des elektrischen Feldes zeigen. Die große Leistung von Mouhot und Villani war es, diese Dämpfung für *alle* Anfangsdaten nachzuweisen, die hinreichend nahe an geeignetem $F^*(v)$ sind. „Nahe" heißt hier nahe im analytischen Sinne (insbesondere in allen Ableitungen); „geeignetes $F^*(v)$" bedeutet, dass $F^*(v)$ einer 1960 von O. Penrose aufgestellten Bedingung genügt, die, grob gesprochen, gerade die lineare Stabilität sicherstellt.

Optimaler Massentransport

Ein weiteres wichtiges – und inzwischen ziemlich populäres – Arbeitsgebiet von Cedric Villani ist der sogenannte Optimale Massentransport. Dieses Gebiet ging aus einem Variationsproblem hervor, das Gaspard Monge 1781 eingeführt hat. Letzterer gründete übrigens während der turbulentesten Jahre der französischen Revolution eine Vorform der Ecole Normale Supérieure, an der Cedric Villani studiert hat – und zunächst das Amt des Party-Kommissars inne hatte. Schon Monge stellte interessante Bezüge zur Geometrie von Geradenscharen her, entlang derer der Massentransport stattfindet. Bezüge zur inneren Geometrie des zugrundeliegenden Raumes stehen heutzutage im Mittelpunkt: Fast gleichzeitig mit Sturm & von Renesse haben Lott & Villani dieses Variationsproblem benutzt, um die Ricci-Krümmung auf eine Art und Weise zu charakterisieren, die robust unter der Gromov-Hausdorff-Konvergenz von Riemann'schen Mannigfaltigkeiten ist – obwohl dieser Konvergenzbegriff so schwach ist, dass man gute Kompaktheitssätze hat. Durch weitere wichtige, sehr vielfältige Resultate und zwei Monographien hat Villani entscheidend mitgeholfen, den Optimalen Massentransport zu einem reizvollen – und zugänglichen – Forschungsgebiet zwischen Analysis, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung auszubauen. Vielleicht ergeben sich hier noch weitergehende und fruchtbare Bezüge zu einer anderen bahnbrechenden Arbeit: der Perelman'schen zum Riccifluss.

Prof. Dr. Felix Otto, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstraße 22, 04103 Leipzig
felix.otto@mis.mpg.de

Geboren am 19. Mai 1966 in München. Studium der Mathematik und Promotion an der Univ. Bonn (1993), Professor University of California at Santa Barbara (1998), Professor Univ. Bonn (1999), Sprecher des SFB 611 „Singuläre Phänomene und Skalierung in mathematischen Modellen" Univ. Bonn (2002–2006), Geschäftsführender Direktor des Excellenzclusters „Hausdorff Center for Mathematics" (2006–2009), Direktor und Wissenschaftliches Mitglied am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften (seit 2010), Honorarprofessor an der Univ. Leipzig (seit 2010), ordentliches Mitglied der Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften (seit 2007), Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina (seit 2008), Gottfried-Wilhelm-Leibnizpreis der DFG (2006).