Alte Briefe – aktuelle Fragen

Aus Hausdorffs Briefwechsel

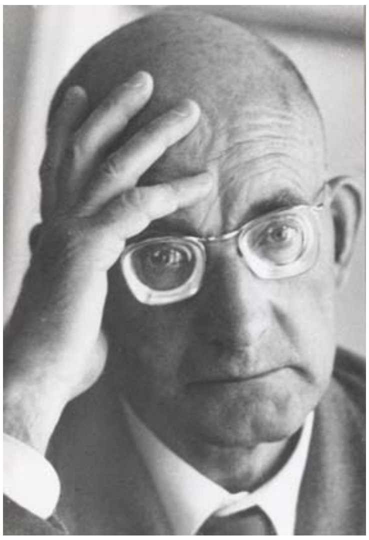
Jürgen Elstrodt

Fritz Grunewald (1949–2010)
zum Gedächtnis

Die Edition der Gesammelten Werke Felix Hausdorffs, ein Langzeitprojekt der Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften und der Künste, das am Mathematischen Institut der Universität Bonn angesiedelt ist, macht weitere Fortschritte. Im Jahre 2010 soll Band 8 erscheinen, der Hausdorffs literarischem Werk gewidmet ist. Für 2011 ist die Publikation von Band 9 vorgesehen, der Hausdorffs Briefwechsel mit Mathematikern und Philosophen enthalten wird. In einem dieser Briefe findet man eine von A. N. Kolmogoroff (1903–1987) an Hausdorff gerichtete Frage, die bisher offenbar unbekannt war und die in engem Zusammenhang steht mit neueren Untersuchungen auf dem Gebiet der Maßtheorie.

1 Fragestellung

Am 27. 12. 1932 schreibt der bekannte Topologe Paul Alexandroff (1896–1982) aus Moskau an Felix Hausdorff (1868–1942) in Bonn. Er berichtet über einen wundervollen Musikabend, teilt mit, dass sein Schüler L. Pontrjagin (1908–1988) „neue sehr schöne topologische Sätze" bewiesen habe, und freut sich über seine jüngsten Ergebnisse über die Bettischen Gruppen kompakter metrisierbarer Räume, die ihm bereits vor Erscheinen der Monographie [1] reichlich neuen Stoff für eine (nie erschienene) „zweite Auflage" böten. Dann schreibt er weiter:



Paul Alexandroff (Quelle: MFO)

> Übrigens noch eine mathematische Frage, die mir heute Kolmogoroff gestellt hat. Kann jede messbare ebene Menge M durch eine Abbildung f, bei der die Entfernung keiner zwei Punkte vergrößert wird (die also u. a. stetig ist) in einen ebenen Polygonbereich verwandelt werden, dessen Flächeninhalt sich vom Mass der Menge M beliebig wenig unterscheidet? Evtl. wird zugelassen, daß die Menge M in endlich viele Summanden *vor der* Abbildung zerlegt, und daß jeder derselben *für sich* abgebildet wird.

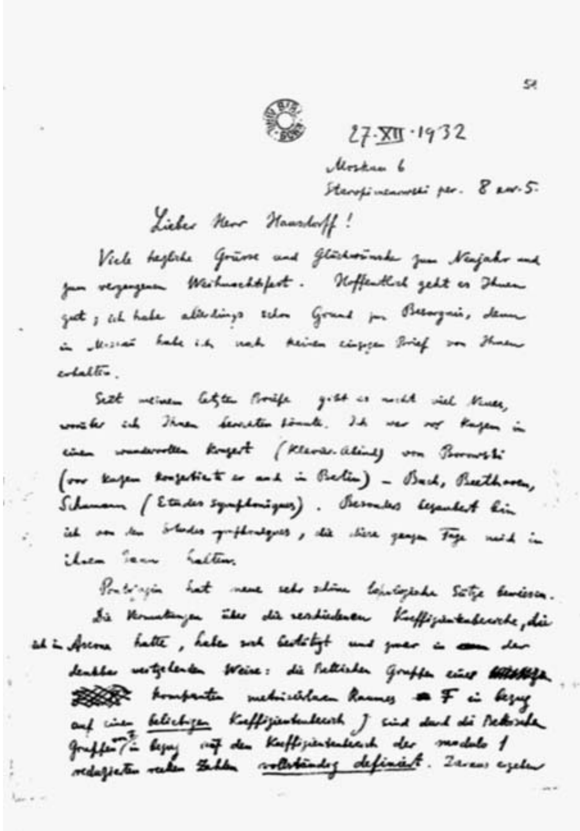
Diese Fragen stehen in engem Zusammenhang mit bemerkenswerten neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der Maßtheorie. Während der erste Teil der Frage wohl nach wie vor offen ist, kann der zweite Teil vollständig beantwortet werden. Darüber wird im Folgenden berichtet.

Zunächst fixieren wir die Terminologie: Es seien A eine Teilmenge des metrischen Raums (X, d) und $f : A \to X$ eine Abbildung. Wir nennen f eine *Lipschitz-Abbildung* (der Ordnung 1 mit der Lipschitz-Konstanten 1), falls $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in A$. Gilt sogar mit einem positiven $\varepsilon < 1$ die Ungleichung $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\, d(x, y)$ für alle $x, y \in A$, so heißt f eine *Kontraktion* (genauer: *ε-Kontraktion*). Existiert eine (disjunkte) Zerlegung $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, so dass $f \mid A_i$ eine Lipschitz-Abbildung ist für alle $i = 1, \ldots, m$, so nennen wir f eine *stückweise Lipschitz-Abbildung*. Entsprechend werden *stückweise (ε-)Kontraktionen* und *stückweise Bewegungen* erklärt. Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit λ^n. Nun können wir Kolmogoroffs Fragen wie folgt aussprechen:

(A) *Kann man jede (Lebesgue-)messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ (von positivem endlichem Maß) durch eine Lipschitz-Abbildung auf einen ebenen Polygonbereich abbilden, dessen Flächeninhalt sich von $\lambda^2(M)$ beliebig wenig unterscheidet?*

(B) *Kann man evtl. eine Abbildung wie unter* (A) *mit Hilfe einer stückweisen Lipschitz-Abbildung herstellen?*

Hier bedeutet es unter (B) keine echte Verschärfung der Frage, wenn wir gleich verlangen, dass M auf ein *Quadrat* abzubilden ist, dessen Flächeninhalt sich von $\lambda^2(M)$ um beliebig wenig unterscheidet: Existiert nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stückweise Lipschitz-Abbildung von M auf einen Polygonbereich P, so dass $\lambda^2(P)$ von $\lambda^2(M)$


51

27·XII·1932

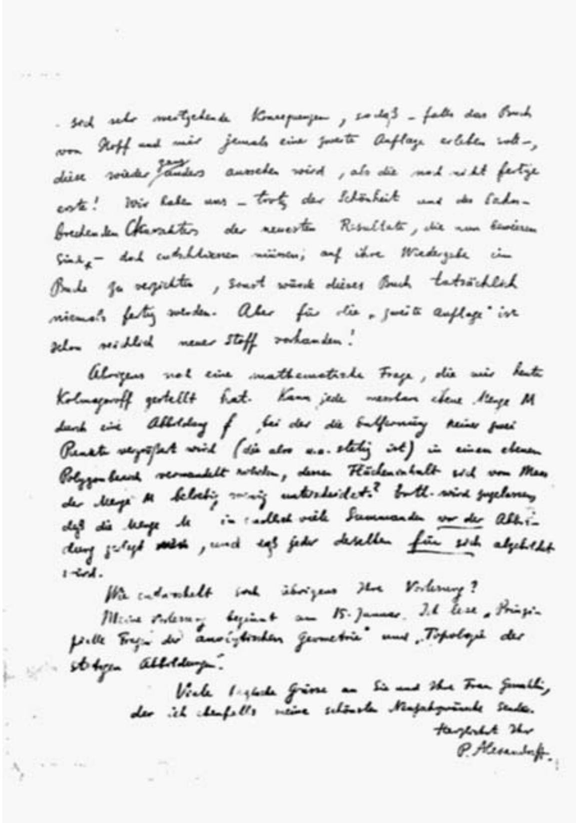
Moskau 6
Staropimenowski per. 8 kw. 5.

Lieber Herr Hausdorff!

Viele herzliche Grüsse und Glückwünsche zum Neujahr und zum vergangenen Weihnachtsfest. Hoffentlich geht es Ihnen gut; ich habe allerdings schon Grund zu Besorgnis, denn im Monat habe ich noch keinen einzigen Brief von Ihnen erhalten.

Seit meinem letzten Briefe gibt es nicht viel Neues, welches ich Ihnen berichten könnte. Ich war vor kurzem in einem wundervollen Konzert (Klavier-Abend) von Borowski (vor kurzem konzertierte er auch in Berlin) – Bach, Beethoven, Schumann (Études symphoniques). Besonders begeistert bin ich von den Études symphoniques, die diese ganze Tage mich in ihrem Bann halten.

Pontrjagin hat neue sehr schöne topologische Sätze bewiesen. Die Vermutungen über die verschiedenen Koeffizientenbereiche, die ich in Ascona hatte, haben sich bestätigt und zwar in der denkbar weitgehenden Weise: die Bettischen Gruppen einer kompakten metrischen Raumes F in bezug auf einen beliebigen Koeffizientenbereich J sind durch die Bettischen Gruppen T in bezug auf den Koeffizientenbereich der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen vollständig definiert. Daraus ergeben


sich sehr weitgehende Konsequenzen, sodaß – falls das Buch von Hopf und mir jemals eine zweite Auflage erleben sollte –, diese wieder ganz anders aussehen wird, als die noch nicht fertige erste! Wir haben uns – trotz der Schönheit und des bahnbrechenden Charakters der neuesten Resultate, die [illegible] – doch entschliessen müssen, auf ihre Wiedergabe im Buche zu verzichten, sonst würde dieses Buch tatsächlich niemals fertig werden. Aber für die „zweite Auflage" ist schon wirklich neuer Stoff vorhanden!

Übrigens noch eine mathematische Frage, die mir heute Kolmogoroff gestellt hat. Kann jede messbare ebene Menge M durch eine Abbildung f, bei der die Entfernung keiner zwei Punkte vergrößert wird (die also u.a. stetig ist) in einen ebenen Polygonbereich verwandelt werden, dessen Flächeninhalt sich vom Mass der Menge M beliebig wenig unterscheidet? Evtl. wird zugelassen, daß die Menge M in endlich viele Summanden vor der Abbildung zerlegt wird, und daß jeder derselben für sich abgebildet wird.

Wie entwickelt sich übrigens Ihre Vorlesung?

Meine Vorlesung beginnt am 15. Januar. Ich lese „Prinzipielle Fragen der [illegible] Geometrie" und „Topologie der stetigen Abbildungen".

Viele herzliche Grüsse an Sie und Ihre Frau Gemahlin, der ich ebenfalls meine schönsten Neujahrswünsche sende.

Herzlichst Ihr
P. Alexandroff.

Paul Alexandroff an Felix Hausdorff, Moskau, 27. 12. 1932

um höchstens ε abweicht, so können wir P in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen zerlegen, die sich nach Ausübung geeigneter Bewegungen lückenlos zu einem mit P flächengleichen Quadrat Q zusammenfügen (s. [24], S.27). Durch Komposition dieser Bewegungen mit den „Komponenten" der stückweisen Lipschitz-Abbildung von M auf P erhält man dann die gewünschte stückweise Lipschitz-Abbildung von M auf ein Quadrat. – In der Tat wird sich bei der Lösung von (B) gleich eine stückweise Lipschitz-Abbildung auf ein Quadrat einstellen.

2 Hintergrund

Kolmogoroffs Anfrage erfolgt vor dem Hintergrund seiner Arbeit [8]. In dieser Abhandlung betrachtet der Autor für $1 \leq k \leq n$ sog. *k-dimensionale Maßfunktionen* μ, die für alle Suslinschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind, den üblichen abzählbaren Additivitäts- und Subadditivitätsbedingungen genügen, für den k-dimensionalen Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ den Wert 1 annehmen und überdies *monoton* sind im Sinne folgender Bedingung III:

III. Für jede Lipschitz-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und alle Suslinschen Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(f(E)) \leq \mu(E) .$$

Dass Kolmogoroff hier voraussetzt, μ sei für alle Suslinschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert (und nicht nur für alle Borelschen Mengen, die ja Suslinsch sind), hat seinen Grund in eben dieser Bedingung III: Stetige Bilder Borelscher Mengen brauchen nicht Borelsch zu sein, aber stetige Bilder Suslinscher Mengen sind notwendig Suslinsch ([5], S. 208 ff.), so dass Bedingung III sinnvoll ist. (Für das Verständnis des Folgenden sind keine Kenntnisse über Suslinsche Mengen nötig.)

Für $k = n$ erweist sich λ^n als die eindeutig bestimmte n-dimensionale Maßfunktion im $\mathbb{R}^n$. Als ein Hauptresultat beweist Kolmogoroff für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Existenz einer maximalen und einer minimalen k-dimensionalen Maßfunktion $\overline{\mu}^k$ bzw. $\underline{\mu}^k$, so dass für jede andere k-dimensionale Maßfunktion μ^k gilt: $\underline{\mu}^k \leq \mu^k \leq \overline{\mu}^k$. Er zeigt ferner, dass die Ungleichung $\overline{\mu}^k(E) > \underline{\mu}^k(E)$ für eine Suslinsche Menge E nur dann gelten kann, wenn $\overline{\mu}^k(E) = \infty$ ist. Als Standardreferenz für die Eigenschaften Suslinscher Mengen dient ihm dabei [5]. Auf S. 361 äußert er unter

Felix Hausdorff (Quelle: Nachlass Hausdorff, Kapsel 65, Abteilung Handschriften und Rara der Universitäts- und Landesbibliothek Bonn)

Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff (Quelle: MFO)

Hinweis auf [4] die vorsichtig formulierte Vermutung, die minimale 1-dimensionale Maßfunktion stimme mit dem 1-dimensionalen Hausdorff-Maß überein. Diese Vermutung wurde von Besicovitch [2] widerlegt. Vituškin et al. [23] konstruierten sogar eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit positivem 1-dimensionalem Hausdorff-Maß und minimalem 1-dimensionalem Maß 0. Von dieser kompakten Menge zeigte Keleti [7], dass sie nicht mittels einer Lipschitz-Abbildung auf ein reelles Intervall (positiver Länge) abgebildet werden kann. Dieses Ergebnis steht ersichtlich in gewissem Zusammenhang mit Frage (A) und der weiter unten genannten Frage (P_1).

In der Arbeit [8], die am 1. 1. 1932 bei der Redaktion der Mathematischen Annalen einging, erwähnt Kolmogoroff die Fragen (A), (B) nicht. Alexandroffs Brief ist auf den 27. 12. 1932 datiert, und der Schreiber bemerkt, dass ihm die Fragen am gleichen Tage gestellt wurden. Daher ist die Problemstellung Kolmogoroff vermutlich gegen Ende des Jahres 1932 in den Sinn gekommen. Zu dieser Zeit widmete er sich vor allem den Abschlussarbeiten am Manuskript eines seiner einflussreichsten Werke, den *Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [9]. Es scheint unbekannt zu sein, ob Kolmogoroff selbst einen Beitrag zur Lösung der Probleme (A), (B) geliefert hat, aber offenbar erwartete er bei Hausdorff ein gewisses Interesse für die Fragestellung wegen Hausdorffs berühmter paradoxer Zerlegung der Sphäre im $\mathbb{R}^3$ (s. [3]). Es ist bekannt, dass Hausdorff die hierauf aufbauenden Arbeiten von Banach und Tarski mit lebhaftem Interesse verfolgte (s. *Commentary* in [6], S. 11–18). Wir wissen nicht, ob es eine detaillierte Antwort Hausdorffs auf die Fragen (A), (B) gegeben hat. Überliefert ist lediglich ein Brief Hausdorffs vom 18.2.1933 an Alexandroff, in dem er mitteilt: „Meine Vorlesung hat mich viel Zeit gekostet, so dass ich weder die Besprechung von Menger gemacht noch die Arbeit von Haar und Neumann gelesen, noch über Ihre Frage nach der Abbildung meßbarer Mengen auf Komplexe nachgedacht habe."

Bei den Paradoxien von Hausdorff, Banach und Tarski wird stets die *Bewegungsinvarianz* des Maßes zugrunde gelegt. (Einen aktuellen Überblick über diesen Problemkreis vermitteln [17], [18].) Dagegen fordert Kolmogoroff unter III. die *Monotonie* des Maßes unter Lipschitz-Abbildungen (aus der offenbar die Bewegungsinvarianz folgt). Paradoxien des Maßes unter Kontraktionen wurden wohl erstmals von J. von Neumann [20] aufgedeckt. Wir werden noch auf diese Arbeit zurückkommen.

3 Antwort auf Frage (B)

Die Antwort auf Frage (B) ist positiv.
Das ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz, den der Verf. einer freundlichen Mitteilung von M. Laczkovich (Budapest) vom 18. 6. 2009 verdankt.

Satz. *Jede messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ von positivem Maß lässt sich durch eine stückweise Kontraktion auf ein Quadrat beliebiger Größe abbilden.*

Beweis. Die Fragestellung ist eng verbunden mit einem schwierigen Problem das erstmals von M. Laczkovich aufgeworfen wurde (s. [13], S. 164; [14], S. 443; [15]; [18], S. 106):

(P_n) *Gibt es zu jeder messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ von positivem Maß eine Lipschitz-Abbildung von A auf ein Intervall (oder eine Vollkugel) im $\mathbb{R}^n$?*

Für $n = 2$ wurde (P_2) erstmals von D. Preiss 1992 in einem unveröffentlichten Manuskript *positiv* (!) entschieden. Anschließend veröffentlichte J. Matoušek ([19]) eine etwas einfachere und zugleich teilweise schärfere Lösung und bewies: *Es gibt eine universelle Konstante $c > 0$,* *so dass zu jeder messbaren Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ vom Maße 1 eine Lipschitz-Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to [0, c]^2$ existiert mit $f(E) = [0, c]^2$.* (Da trivialerweise eine Lipschitz-Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ existiert, liefert auch der Satz von Matoušek eine positive Antwort auf (P_2).)

Ist nun $M \subset \mathbb{R}^2$ eine messbare Menge positiven Maßes, so lässt sich M nach Preiss und Matoušek zunächst durch eine Lipschitz-Abbildung f auf ein Quadrat P abbilden. Ist ferner $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat beliebiger Größe, so existiert nach W. Sierpiński [21] eine surjektive stückweise Kontraktion $g : P \to Q$, und dann ist $g \circ f : M \to Q$ eine Abbildung der gewünschten Art. –

Bei flüchtiger Betrachtung erscheint der hier benutzte Satz von Sierpiński absurd: Wie sollte es gelingen, das Quadrat P durch eine surjektive stückweise *Kontraktion* g auf ein Quadrat Q mit der 1000-fachen Seitenlänge abzubilden? Nun, die der stückweisen Kontraktion zugrunde liegenden „Stücke" von P werden hier – wie bei den entsprechenden Paradoxien von Hausdorff, Banach, Tarski, von Neumann – mit Hilfe des Auswahlaxioms der Mengenlehre konstruiert und sind in der Regel nicht messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, so dass sich jedwede anschauliche Vorstellung von der quantitativen „Größe" dieser Mengen verbietet.

Die Antwort auf Frage (A) *scheint offen zu sein.* Zwar liefert der Satz von Matoušek eine Lipschitz-Abbildung von M auf ein Quadrat, aber es besteht keine Hoffnung, die Konstante c im Satz von Matoušek beliebig nahe bei 1 wählen zu können, denn eine Kreisscheibe vom Flächeninhalt 1 (Durchmesser $2/\sqrt{\pi}$) lässt sich nicht durch eine Lipschitz-Abbildung auf ein Quadrat abbilden, dessen Flächeninhalt beliebig nahe bei 1 liegt, da die Diagonale im Einheitsquadrat die Länge $\sqrt{2} > 2/\sqrt{\pi}$ hat.

4 Dimensionen ungleich 2

Im Folgenden diskutieren wir die Frage (P_n) und die Analoga von (A), (B) für die Dimensionen ungleich 2. Im Fall der Dimension 1 ist die Antwort leicht: Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge positiven Maßes, so wählen wir $a > 0$ so groß, dass $\lambda^1(A \cap [-a, a]) > 0$ ist und setzen $f(x) := 0$ für $x \leq -a$ und $f(x) := \lambda^1(A \cap [-a, \min(x, a)])$ für $x > -a$. Dann ist f eine Lipschitz-Abbildung von A auf ein reelles Intervall, d.h. (P_1) ist zu bejahen. Hat A ein endliches positives Maß, so wählen wir zu vorgelegtem $\varepsilon > 0$ die Zahl a so groß, dass sich $\lambda^1(A)$ von $\lambda^1(A \cap [-a, a])$ um höchstens ε unterscheidet und erkennen: Auch (A), (B) sind positiv zu beantworten.

Im Fall der Dimension 1 erzielte J. von Neumann [20] folgendes höchst paradox erscheinendes Resultat, das Sierpiński als Anregung zu seiner oben benutzten Arbeit [21] diente: *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so lässt sich I durch eine bijektive stückweise ε-Kontraktion auf jedes beschränkte reelle Intervall (beliebiger Länge) abbilden.* Mit Hilfe des sog. Satzes von Banach–Schröder–Bernstein ([24], S. 25) folgert v. Neumann hieraus: *Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen mit nicht-leerem Inneren, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stückweise ε-Kontraktion von A auf B* ([24], S. 105). – Bemerkenswerte Verschärfungen und Ergänzungen dieser Resultate hat M. Laczkovich erzielt (s. [11], [14], [15]). –

Wenden wir uns nun den Dimensionen ≥ 3 zu, so ist zunächst festzustellen: *Für alle $n \geq 3$ ist die Frage (P_n) offen.* Zum Analogon von (B) bemerken wir: Nach dem Banach–Tarskischen Paradoxon lässt sich jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ mit nicht-leerem Inneren sogar durch eine „stückweise Bewegung" bijektiv auf jedes beschränkte Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren (z. B. auf jeden beliebigen Würfel im $\mathbb{R}^n$) abbilden. Dabei ist die Messbarkeit von M völlig irrelevant, und P kann willkürlich vorgeschrieben werden. Das Analogon von (B) scheint daher für die Dimensionen ≥ 3 nicht sachgerecht formuliert zu sein, und Kolmogoroff war sich dessen zweifellos bewusst, denn er beschränkte sich auf die Dimension 2.

5 Gleichzerlegbarkeit bez. Translationen

Ein höchst erstaunliches, für alle Dimensionen $n \geq 1$ gültiges Resultat, das dem Problemkreis (B) zugeordnet werden kann, stammt von M. Laczkovich [16]: Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heißen *gleichzerlegbar bez. Translationen*, wenn eine endliche Zerlegung von A in paarweise disjunkte Mengen existiert, die nach Ausübung geeigneter *Translationen* in eine Zerlegung von B in paarweise disjunkte Mengen überführt wird. *Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar und gleichzerlegbar bez. Translationen, so ist $\lambda^n(A) = \lambda^n(B)$.* (Da die Mengen der disjunkten Zerlegung von A nicht messbar zu sein brauchen, ist dieses Ergebnis durchaus nicht selbstverständlich; s. [24], S. 156, Corollary 10.9.) Der Satz von Laczkovich besagt nun: *Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte messbare Mengen gleichen positiven Maßes und mit „kleinen" Rändern, so sind A und B gleichzerlegbar bez. Translationen.* Die „Kleinheit" der Ränder wird hier gemessen im Sinne des sog. oberen Entropie-Index von Kolmogoroff [10]. Anstatt diesen etwas technischen Begriff hier auszubreiten, begnügen wir uns mit einer eindrucksvollen Klasse von Beispielen: Jede beschränkte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ hat im Kolmogoroffschen Sinne einen „kleinen" Rand, und es folgt: *Jede beschränkte konvexe Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ von positivem Maß ist gleichzerlegbar bez. Translationen zu einem Würfel (oder jeder anderen konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) vom Maß $\lambda^n(A)$.* Hierin enthalten ist z. B. die positive Lösung des über 60 Jahre lang offenen Tarskischen Problems der Quadratur des Kreises ([22]): *Die Kreisscheibe und ein Quadrat gleichen Flächeninhalts sind gleichzerlegbar bez. Translationen* (s. [12]).

Danksagung

Der Verfasser dankt Herrn M. Laczkovich für einen sehr hilfreichen Briefwechsel, ohne den dieser Beitrag nicht zustande gekommen wäre.

Literatur

[1] Alexandroff, P., Hopf, H.: Topologie. Erster Band. Berlin: Verlag von Julius Springer 1935

[2] Besicovitch, A.S.: On the Kolmogoroff maximum and minimum measures. Math. Ann. 113 (1937), 416–423

[3] Hausdorff, F.: Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. Math. Ann. 75 (1914), 428–433 (auch in [6], 5–10)

[4] —: Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. 79 (1919), 157–179 (auch in [6], 21–43)

[5] —: Mengenlehre. 2. Aufl. Berlin u. Leipzig: W. de Gruyter 1927 (3. Aufl. 1935)

[6] —: Gesammelte Werke. Bd. IV: Analysis, Algebra und Zahlentheorie. Berlin etc.: Springer-Verlag 2001

[7] Keleti, T.: A peculiar set in the plane constructed by Vituškin, Ivanov and Melnikov. Real Anal. Exch. 20 (1) (1994/95), 291–312

[8] Kolmogoroff, A.: Beiträge zur Maßtheorie. Math. Ann. 107 (1932), 351–366

[9] —: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Verlag von Julius Springer 1933

[10] —: On certain asymptotic characteristics of completely bounded metric spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR 108 (1956), 385–388 (Russisch)

[11] Laczkovich, M.: Von Neumann's paradox with translations. Fund. Math. 131 (1988), 1–12

[12] —: Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem. J. Reine Angew. Math. 404 (1990), 77–117

[13] —: Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes. Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste 23 (1991), 145–176 (1993)

[14] —: Paradoxical decompositions using Lipschitz functions. Real Anal. Exch. 17 (1991/92), 439–444

[15] —: Paradoxical decompositions using Lipschitz functions. Mathematika 39 (1992), 216–222

[16] —: Decomposition of sets with small boundary. J. London Math. Soc. (2) 46 (1992), 58–64

[17] —: Paradoxical decompositions: a survey of recent results. First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, 159–184 (Progress in Math., Vol. 120) Basel: Birkhäuser 1994

[18] —: Paradoxes in measure theory. Handbook of measure theory, E. Pap (ed.), Vol. I, 83–123. Amsterdam: North-Holland 2002

[19] Matoušek, J.: On Lipschitz mappings onto a square. The mathematics of Paul Erdös, R.L. Graham et al. (eds.), Vol. II, 303–309. Berlin etc.: Springer-Verlag 1997 (Algorithms Comb. 14 (1997), 303–309)

[20] Neumann, J. von: Zur allgemeinen Theorie des Masses. Fund. Math. 13 (1929), 73–116 (Collected Works, Vol. I, 599–643. Oxford etc.: Pergamon Press 1961)

[21] Sierpiński, W.: Sur un paradoxe de M. J. von Neumann. Fund. Math. 35 (1948), 203–207 (Œuvres choisies, tome III, 591–595. Warszawa: PWN 1976)

[22] Tarski, A.: Problème 38. Fund. Math. 7 (1925), 381

[23] Vituškin, A.G., Ivanov, L.D., Mel'nikov, M.S.: Incommensurability of the minimal linear measure with the length of a set. Dokl. Akad. Nauk SSSR 151 (1963), 1256–1259 = Soviet Math., Dokl. 4 (1963), 1160–1164

[24] Wagon, S.: The Banach–Tarski paradox. Cambridge: Cambridge University Press 1985. Second ed. 1986

Prof. Dr. Jürgen Elstrodt, Mathematisches Institut,
Universität Münster, Einsteinstr. 62, 48149 Münster
elstrod@math.uni-muenster.de

Jürgen Elstrodt (geb. 1940) ist Professor i. R. am Mathematischen Institut der Universität Münster. Seine Arbeitsgebiete sind reelle Analysis und reell-analytische automorphe Formen. Im Ruhestand beschäftigt er sich vornehmlich mit mathematikgeschichtlichen Themen.