$3N$ bunte Punkte in der Ebene

Günter M. Ziegler

Warum über den gefärbten Tverberg-Satz berichten?

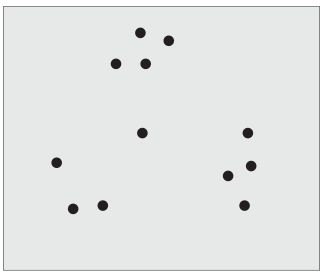
- *Er klingt harmlos, elementar; unser „Spielmaterial" sind ein paar bunte Punkte in der Ebene;*
- *es gibt Geschichten zu erzählen, etwa die von einem norwegischen Mathematiker, der frierend in einem Hotelzimmer in Manchester sitzt;*
- *die überraschende neue Wendung und der Schlüssel zur Lösung liegen nicht in einem schwierigen Beweis, sondern in der „richtigen" Formulierung des Problems bzw. Resultats;*
- *eine interessante Mischung aus kombinatorischen, geometrischen, algebraischen und topologischen Methoden kommt zum Einsatz;*
- *es gibt Fortschritt (zu dem ich beitragen konnte), und*
- *es gibt noch viel zu tun: spannende Vermutungen, die wieder harmlos klingen, elementar, verspielt.*

1 Eine Vermutung von Birch

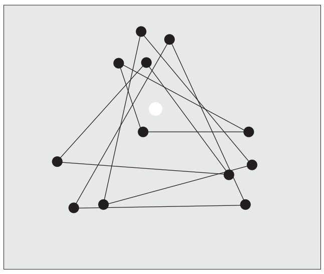
„Über $3N$ Punkte in der Ebene" heißt ein kurzer Aufsatz [6] von Bryan John Birch aus dem Jahr 1959. Das Hauptergebnis findet sich gleich auf der ersten Seite:

Birchs Theorem 1:
$3N$ Punkte in einer Ebene bestimmen immer N Dreiecke, die einen Punkt gemeinsam haben.

Um das zu illustrieren, dürfen wir annehmen, dass die $3N$ Punkte in allgemeiner Lage sind. Für $N = 4$ haben wir also $3N = 12$ Punkte, und das kann so aussehen:



Die Behauptung ist, dass man für *jede* solche Punktkonfiguration in der Ebene eine Aufteilung in Tripel findet, so dass die entsprechenden Dreiecke einen Punkt gemeinsam haben:



Der *Beweis*, den Birch für dieses Ergebnis angab, ist auch bemerkenswert, weil er einen topologischen Fixpunktsatz verwendet – viele Jahre vor Lovász' Beweis der Kneser-Vermutung mithilfe des Borsuk–Ulam-Satzes, der gemeinhin als Anfang der „Topologischen Kombinatorik" gesehen wird [9]. Birch leitet es nämlich aus dem „Center Point Theorem" ab, das Richard Rado schon 1946 publiziert hatte [15], das Birch aber offenbar nicht kannte:

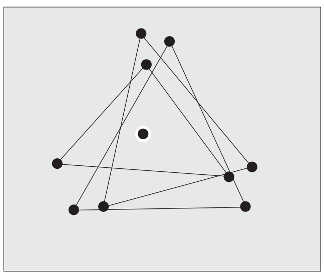
Center Point Theorem:
Zu $3N$ Punkten in der Ebene gibt es immer einen Punkt x, so dass jede Halbebene, die x enthält, auch mindestens N der $3N$ gegebenen Punkte enthalten muss.

Rados Beweis dafür war elementar-geometrisch (er verwendete den Satz von Helly), der Beweis von Birch verwendet den Brouwer'schen Fixpunktsatz.

In derselben kurzen Arbeit bemerkt Birch aber auch, dass die Schranke „$3N$" in gewisser Hinsicht nicht scharf ist, weil man nämlich ein Resultat mit $3N - 2$ Punkten formulieren kann:

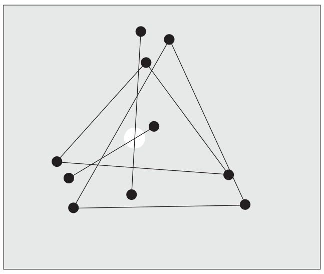
Birchs Theorem 1*:
$3N - 2$ Punkte in einer Ebene kann man immer auf N Teilmengen aufteilen, deren konvexe Hüllen einen Punkt gemeinsam haben.

Die Teilmengen haben dann jeweils einen, zwei, oder drei Punkte, die konvexe Hülle ist also ein Dreieck, eine Strecke, oder ein einzelner Punkt – und gefordert wird, dass die N konvexen Objekte einen Punkt gemeinsam haben: Unsere Abbildung illustriert dies am Beispiel mit $N = 4$:



 MDMV 18/2010 | 164–170

Eine Lösung kann also aus einem der Punkte bestehen, der in $N-1$ Dreiecken liegt. Alternativ könnte es $N-2$ Dreiecke geben, die alle den Schnittpunkt von zwei weiteren Strecken enthalten:



Und ziemlich klar ist auch, dass weniger als $3N-2$ Punkte im allgemeinen nicht auf N Teilmengen aufgeteilt werden können, deren konvexe Hüllen sich schneiden: Das Theorem 1* von Birch ist *scharf*.

Wer ist Bryan John Birch? Woher kam das Problem? Der Aufsatz selbst gibt nur einen vagen Hinweis in den Danksagungen:

> In conclusion, I would like to thank Professor Eggleston for his entertaining lectures, which led me to perpetrate this note.

Aber man kann ja den Kollegen Birch (Jahrgang 1931, Emeritus in Cambridge) fragen. Auf meine Email kam prompte Antwort:

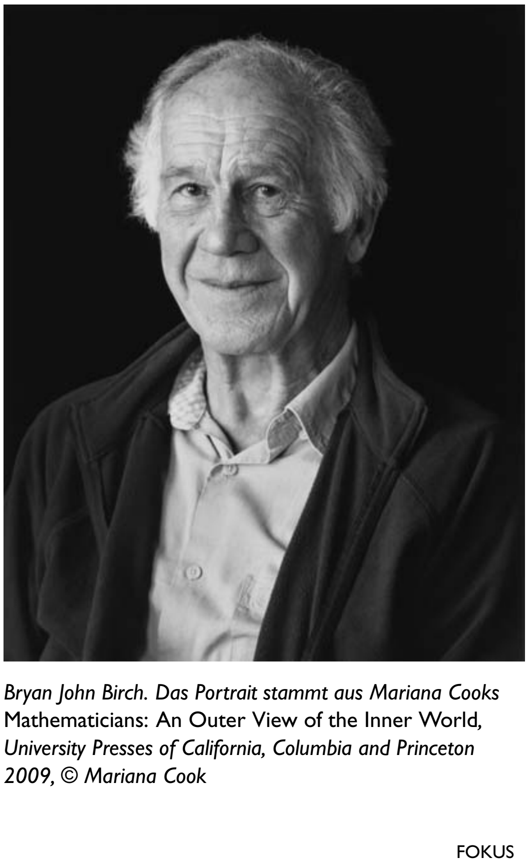
> I was an undergraduate at Trinity (College Cambridge) from 1951–4, and in my third year I took Part III of the Mathematical Tripos; then as now, one attended 6 to 8 'starting graduate student level' courses and took a cross-section exam at the end of the year; nowadays of course it is no longer taken by 3rd year students. One of the courses I took, in the spring of 1954 I would guess, was a very pleasant course on 'Convexity' by H G Eggleston; this course formed the basis for his Cambridge Tract, published in 1958 according to my references. Eggleston's course contained several proofs of the isoperimetric inequality, as well as Helly's theorem (of course) and I was involved with more complicated plane geometry when I started research in the Geometry of Numbers under Ian Cassels; so it wasn't unnatural for me to be thinking about '3*N* Points in a Plane'; but one tends not to remember details of what one was thinking about 54 years ago.
>
> I submitted a thesis in competition for a Trinity Junior Research Fellowship in September 1956; this thesis was a compendium of various bits and pieces, including '3N points in a plane'. The judges of the competition came from all faculties, so one had to include a summary that laymen could read. I remember that my summary included a picture of the application of the first non-Helly case (7 points in a plane) to the configuration formed by the seven brightest stars in the Pleiades. I don't remember why the paper wasn't submitted till 1959: I was working on several other things – I switched to additive analytic number theory, and then to elliptic curvery – and very probably 1959 was when I gave up trying to prove higher dimensional cases of Tverberg's theorem; another possibility is that I was jogged into writing up by the publication of Eggleston's tract.

In der Tat ist Birch ja durch seine Arbeiten zu elliptischen Kurven bekannt geworden – ganz besonders durch das Eine-Million-Dollar-Milleniumsproblem das seinen Namen trägt, die „Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer".

Weniger lukrativ, aber trotzdem wichtig und einflussreich war eine andere Vermutung von Birch, aus seiner „3*N* Punkte in einer Ebene"-Arbeit, auf derselben Seite wie sein Theorem 1*, die *n*-dimensionale Version davon:

Birchs Vermutung
$(n+1)N-n$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ kann man immer auf N Teilmengen aufteilen, deren konvexe Hüllen sich schneiden.

Und wenn Birch nun schreibt, er habe wohl 1959 aufgegeben, „höherdimensionale Fälle des Satzes von Tverberg zu beweisen", so verdreht das die historische Reihenfolge: er hat offenbar aufgegeben, höherdimensionale Versionen des Satzes von Birch zu beweisen – also Teilresultate für seine eigene Vermutung. Tverberg kam später.



Bryan John Birch. Das Portrait stammt aus Mariana Cooks Mathematicians: An Outer View of the Inner World, *University Presses of California, Columbia and Princeton 2009, © Mariana Cook*

2 Der Satz von Tverberg

Helge Tverberg, Jahrgang 1935, ist ein norwegischer Mathematiker. 1961 hat er am University College in London einen Workshop zur Funktionalanalysis besucht, wo am Rande auch ein Kurs über Konvexität angeboten wurde, vermutlich von Rogers.

> I found this material fascinating, and read upon it more back in Bergen. Helly's Theorem was especially fascinating, and, in my reading, I came upon the following application. Let S be a set of $3N$ points in the plane. Then, there is a point p, not necessarily in S, such that every half-plane containing p contains at least N points from S. It struck me that this would follow simply if it were always possible to split S into N triplets so that the N triangles so formed would have a common point p. For, a half-plane containing p would contain at least 1 vertex from each triangle. [19, p. 16]

Tverberg stieß also auf das Birch-Problem bei dem Versuch, Rados Center Point Theorem zu beweisen – also anders rum als Birch.

1962 hat Tverberg dann den ICM in Stockholm besucht, und dort nach einem Abendessen mit Bryan Birch und Hallard Croft aus England hat er bei der Verabschiedung an der Straßenecke Croft von seinem Resultat über 3N Punkte in der Ebene erzählt. Croft musste ihn enttäuschen, das Ergebnis sei schon bekannt und publiziert, von Birch – aber er könne sich ja am höherdimensionalen Fall versuchen, den habe Birch nicht gekonnt.

1963 hat Tverberg zunächst den 3-dimensionalen Fall gelöst: eine komplizierte Lösung, die aus sieben Fällen bestand und keinesfalls auf höhere Dimensionen erweitert werden könnte.

1964 hatte er dann ein Reisestipendium nach England, wo er das Problem mit Birch (dann in Manchester) und mit Richard Rado (an der University of Reading) besprechen wollte. Rado hatte ebenfalls Teilergebnisse erzielt. Was dann passierte, beschreibt Tverberg so [20, S. 16/17]:

> I recall that the weather was bitterly cold in Manchester. I awoke very early one morning shivering, as the electric heater in the hotel room had gone off, and I did not have an extra shilling to feed the meter. So, instead of falling back to sleep, I reviewed the problem once more, and then the solution dawned on me!
> I explained it to Birch, and, after an agreeable day of mathematical conversation with him, returned to Norway to start writing up the result.

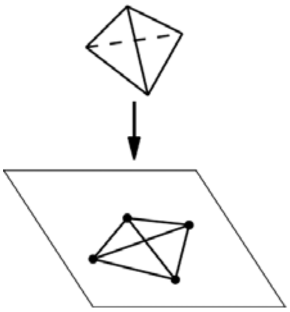
Birch erzählt das anders: Tverberg sei nicht so sehr daran interessiert gewesen, die Lösung zu erklären, sondern wollte vielmehr am letzten Tag noch die Stadt sehen. Aber den Widerspruch brauchen wir hier nicht aufzuklären. Jedenfalls erschien 1966 (eingereicht am 8. Mai 1964) sein Aufsatz „A generalization of Radon's theorem" [19], den er als „T66" bezeichnet. Der Tverberg-Satz ist sein berühmtestes Resultat, das ihn auch weiter nicht losgelassen hat. So erschien 1981 „A generalization of Radon's theorem, II" mit einem neuen Beweis und 1993 „On generalizations of Radon's Theorem and the Ham Sandwich Theorem" (gemeinsam mit Siniša Vrećica, wo eine interessante Erweiterung vermutet wird). Für den Tverberg-Satz gibt es inzwischen viele verschiedene Beweise, unter anderem auch von Sarkaria (1992) und von Roudneff (2001). Die vielleicht einfachste Variante stammt von Karanbir Sarkaria [16], weiter vereinfacht von Shmuel Onn [4] [11] [12, Sect. 8.3].

Helge Tverberg 1981 (Foto: MFO Oberwolfach)

Der Satz von Tverberg aus der T66-Arbeit ist nun genau Birchs Vermutung. Wir formulieren ihn allerdings heute anders. Ab sofort schreiben wir d für die Dimension (das ist also $d = 2$ für den klassischen Satz von Birch). Wir verwenden den Buchstaben r für die Zahl der Teilmengen, in die wir aufteilen wollten (das war vorher mit N bezeichnet). Und wir verwenden die Abkürzung $N := (d+1)(r-1)$ (die also etwas ganz anderes bezeichnet als das bisherige N). Und statt $N+1$ Punkte in der Ebene und die konvexen Hüllen von Teilmengen zu diskutieren, betrachten wir einen Simplex Δ_N der Dimension N (der also $N+1 = (d+1)(r-1)+1$ Ecken hat) und eine affine Abbildung $f : \Delta_r \to \mathbb{R}^d$, die natürlich insbesondere die $N+1$ Ecken von Δ_N im $\mathbb{R}^d$ platziert. Damit erhält der Tverberg-Satz seine moderne Form:

Birchs Vermutung = Tverbergs Satz
Seien $d \geq 1$, $r \geq 2$ und $N := (d+1)(r-1)$. Für jede affine Abbildung $f : \Delta_N \to \mathbb{R}^d$ gibt es r disjunkte Seiten von Δ_N, deren Bilder unter f sich schneiden.

Unser Bild illustriert diesen Satz für die kleinen Parameter $d = 2$ und $r = 2$, wo also $N = 3$ ist, und es um eine Abbildung eines Tetraeders (3-dimensionaler Simplex) in die Ebene geht.



(Abbildung: Stephan Hell)

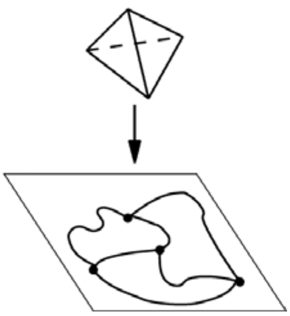
3 Der „topologische Tverberg-Satz“

Die moderne Fassung des Tverberg-Satzes ist nicht nur griffiger (und etwas abstrakter), sie hat auch den Vorteil, dass sie den sogenannten „topologischen Tverberg-Satz“ nahelegt, den die Ungarn Imre Bárány, Senya B. Shlosman und András Szűcs 1981 vorgelegt haben:

„Topologischer Tverberg-Satz“ [5]
Seien $d \geq 1$, $r \geq 2$ und $N := (d+1)(r-1)$. Für jede stetige Abbildung

$$f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

gibt es r disjunkte Seiten von Δ_N, deren Bilder unter f sich schneiden.



(Abbildung: Stephan Hell)

„Topologischer Tverberg-Satz“ ist dabei schlechte Terminologie: nicht nur deshalb, weil weder Tverberg noch der Satz „topologisch“ sind, sondern schlimmer – weil er in der gerade behaupteten Form kein Satz ist, sondern lediglich eine *Vermutung*. Die drei Ungarn haben ihn nämlich nur für den Fall behauptet und bewiesen, dass r eine Primzahl ist. Erst später wurde er auf Primzahlpotenzen r erweitert, als erstes von Murad Özaydin in einem unveröffentlichten Preprint aus dem Jahr 1987. Wir verweisen auf das wunderbare Lehrbuch „Using the Borsuk–Ulam Theorem“ von Jiří Matoušek [13] für Details und Referenzen. Jedenfalls ist die Vermutung für $d \geq 2$ und Nicht-Primzahlpotenzen r weiterhin nicht bewiesen. Der kleinste offene Fall ist also $r = 6$, $d = 2$.

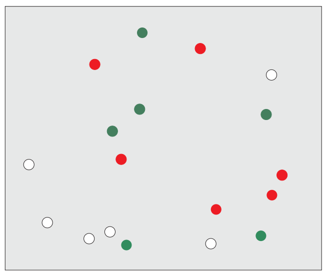
4 „. . . brauchen wir eine gefärbte Version . . . “

Ein anderes Team von drei Ungarn, Imre Bárány, Zoltan Füredi und László Lovász, stieß in einer einflussreichen Arbeit zur Algorithmischen Geometrie (Konferenzversion 1988, Zeitschriftenpublikation 1990 [3]) *On the number of halving planes* auf eine Situation mit drei disjunkten Mengen A, B, C von Punkten in der Ebene und bemerkt:

> For this we need a colored version of Tverberg’s theorem.

Im gegebenen Kontext brauchten die drei nur einen sehr einfachen Spezialfall, aber die Frage nach einer gefärbten Version des Tverberg-Satzes wurde als Herausforderung begriffen und prompt beantwortet. Die erste Antwort, von Imre Bárány und David Larman 1991, bezog sich auf die Situation von $3r$ Punkten in der Ebene, in drei Farben:

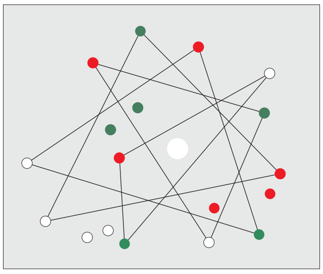
> given r red, r white, r green points in the plane



Zwischenfrage: Warum *rot*, *weiß* und *grün*? David Larman, den ich gefragt habe, wusste das nicht – aber vielleicht hat da sein Koautor die ungarischen Nationalfarben reingeschmuggelt? Wie dem auch sei, hier ist die Antwort von Bárány und Larman:

„Gefärbter Tverberg-Satz“
Seien $d \geq 1$ und $r \geq 2$, und $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ affin (oder zumindest stetig), wobei die $N+1$ Ecken von Δ_N $d+1$ verschiedene Farben tragen, jede Farbklasse C_i von Größe $|C_i| \geq t$ für ein hinreichend großes t. Dann hat Δ_N r disjunkte Regenbogen-Seiten, *deren Bilder unter f sich schneiden.*

Natürlich ist auch hier wieder weder Tverberg noch der Satz gefärbt. Und was hier steht, ist auch kein Satz, weil nicht gesagt ist, was „hinreichend großes t“ heißen soll. Eine *Regenbogen-Seite* ist hier eine d-Seite des Simplex, deren $d+1$ Ecken die $d+1$ verschiedenen Farben haben. Im Fall von $d = 2$ haben wir also mindestens $3t$ Punkte in der Ebene, die drei verschiedene Farben tragen – und die Behauptung ist, dass es dann r Regenbogen-Dreiecke gibt, die einen Punkt gemeinsam haben:



Für $d = 2$ haben das Bárány und Larman bewiesen, und zwar „scharf“, eine gefärbte Version des Birch-Satzes: es reicht dann aus, $t \geq r$ zu fordern. Für $d = 1$ ist der gefärbte Tverberg-Satz eine hübsche Übungsaufgabe. Für $d > 2$ haben Bárány und Larman ihn als Vermutung formuliert.

Der Durchbruch war dann eine Arbeit von Rade Živaljević und Siniša Vrećica aus Belgrad, 1992 publiziert [23]. Unter Einsatz neuer Konzepte und Methoden der Topologischen Kombinatorik („Schachbrett-Komplexe“, Satz von Dold, ...) konnten sie zeigen, dass der gefärbte Tverberg-Satz, so wie wir ihn gerade formuliert haben, für $t \geq 2r - 1$ gilt, falls r eine Primzahl ist – und damit (aufgrund von Bertrands Postulat, dass es zwischen n und $2n$ eine Primzahl gibt [1, Kap. 2]), für $t \geq 4r - 3$ und alle $r \geq 2$.

Der Durchbruch von Rade Živaljević und Siniša Vrećica fand starke Beachtung. Die Resultate wurden anhand der Bárány–Füredi–Lovász-Arbeit [3] für die Algorithmische Geometrie nutzbar gemacht (siehe [12, Sect. 9.2 und 11.3]), der Beweisansatz, das „Test Map/Configuration Space“-Schema, wurde von Sarkaria (1991) und Živaljević (1996–1998) formalisiert, Schachbrettkomplexe wurden weiter studiert und ihre bemerkenswerten Eigenschaften herausgearbeitet, und Matoušek hat die gesamte Mathematik, die man zum Verständnis des Beweises benötigt, in sein schon zitiertes Lehrbuch [13] gepackt.

Trotzdem blieb die Lücke zwischen $t = r$ und $t \geq 4r - 3$, der gefärbte Tverberg-Satz von Živaljević und Vrećica ist nicht „scharf“. Und er ist auch keine Verallgemeinerung des klassischen, ungefärbten Tverberg-Satzes.

Eine scharfe Version gelang erst jetzt, wieder im Dreierteam: Pavle V. M. Blagojević aus Belgrad, mein Berliner Doktorand Benjamin Matschke und ich konnten im vergangenen Oktober einen Beweis präsentieren, dass $t = r$ reicht wenn $r + 1$ Primzahl ist (und damit $t = r + o(r)$ für alle großen r reicht).

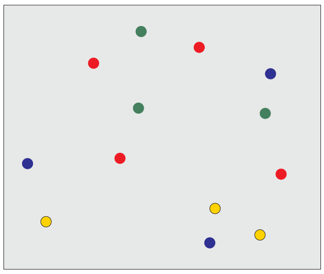
Das Ergebnis war auch deshalb so überraschend, weil es auf einem Umweg zustande kam, und einen Perspektivenwechsel brauchte. Wir sind nämlich auf einen *neuen* gefärbten Tverberg-Satz gestoßen, der mehr Farben verwendet, andere Annahmen über die Farbklassen macht, den klassischen Tverberg-Satz als Spezialfall hat – und offenbar leichter zu beweisen ist.

5 Ein neuer gefärbter Tverberg-Satz

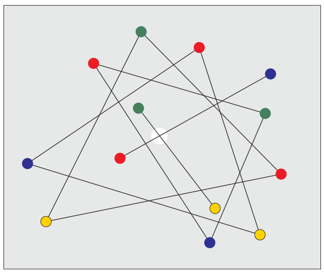
Hier ist er:

„Neuer gefärbter Tverberg-Satz“ [7]
Seien $d \geq 1$, $r \geq 2$ prim, $N := (d+1)(r-1)$ und $f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$ affin (oder zumindest stetig), wobei die $N+1$ Ecken von Δ_N mindestens $d+2$ verschiedene Farben tragen, jede Farbklasse C_i von Größe $|C_i| \leq r-1$. Dann hat Δ_N r disjunkte Regenbogen-Seiten, *deren Bilder unter f sich schneiden.*

Wir betrachten also beispielsweise die folgende Situation in der Ebene ($d = 2$) für $r = 5$, wobei die $N + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ Punkte mit 4 verschiedenen Farben eingefärbt sind, und keine Farbe öfter als $r - 1 = 4$ Mal auftaucht



Gegenüber dem ursprünglichen „gefärbten Tverberg-Satz“ hat sich also die Anzahl der Farben geändert (nicht mehr $d+1$ Farben, sondern mindestens $d+2$), es hat sich die Größe der Farbklassen geändert (nicht mehr groß genug, mindestens r, sondern weniger als r), und es hat sich auch die Definition von *Regenbogen-Seiten* geändert (sie müssen nicht mehr alle Farben tragen und damit jede einzelne genau ein Mal, sondern es sind jetzt Seiten, die keine Farbe mehr als einmal verwenden). Eine Lösung sieht also so aus:



Als Spezialfall lässt unser Satz zu, dass alle Farbklassen die Größe eins haben, also die Ecken des Simplex alle verschiedene Farben tragen, also alle Seiten automatisch die Regenbogeneigenschaft haben – damit erhalten wir den klassischen topologischen Tverberg-Satz von Bárány–Shlosman–Szűcs als Spezialfall.

Als weiteren Spezialfall könnten wir $d + 1$ Farbklassen der Größe $r-1$ haben, und eine letzte Farbklasse besteht aus einer einzelnen weiteren Ecke mit einer neuen Farbe. Dieser Spezialfall ist bedeutend – weil wir aus ihm den scharfen klassischen gefärbten Tverberg-Satz (für $r + 1$

„Spiel & Spaß > Wissen für Kinder" bei eBay

prim) ableiten können, aber auch deshalb, weil aus diesem Spezialfall auch schon der allgemeine Fall folgt. Alle diese Reduktionen sind elementar-geometrisch (und die Ideen dafür auch nicht neu).

Wir wollen also den neuen gefärbten Tverberg-Satz für den Fall von Farbklassen $|C_0| = |C_1| = \cdots = |C_d| = r-1$ und $|C_{d+1}| = 1$ beweisen. Dafür bedienen wir uns des inzwischen ‚klassischen' Konfigurationsraum/Testabbildungs-Schemas, das man aus dem Buch [13] lernen kann – das kürzlich bei *eBay* in der Kategorie „Bücher > Kinder- & Jugendliteratur > Spiel & Spaß > Wissen für Kinder" zu finden war (siehe oben).

Nach diesem Schema müssen wir zeigen, dass eine bestimmte äquivariante Abbildung nicht exisitiert – also eine stetige Abbildung

$$F : (\Delta_{r-1,r})^{*(d+1)} * [r] \quad \longrightarrow_G \quad S^{N-1}$$

die mit der Wirkung einer endlichen Gruppe (hier einer zyklischen oder symmetrischen Gruppe) verträglich sein muss. Der Klassiker unter solchen Resultaten ist der Satz von Borsuk–Ulam, der besagt, dass es keine Abbildung

$$F : S^n \quad \longrightarrow_{\mathbb{Z}_2} \quad S^{n-1}$$

gibt, die mit der antipodalen Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}_2$ verträglich wäre.

In unserem komplizierteren Fall haben wir sogar drei Beweise angegeben. Der einfachste findet sich in [8] und verwendet den Abbildungsgrad. Interessant an diesem Beweis ist, dass man dabei für eine bestimmte Punktkonfiguration die *Anzahl* der Tverberg-Partitionen zählt und das Ergebnis $(r-1)!^d$ bekommt. Man schließt daraus, dass $(r-1)!^d$ durch r teilbar sein muss, was für eine Primzahl r nicht stimmt. (Siehe auch [22] für eine Skizze dieses Beweises, und [14] für eine elementare, „topologie-freie" Version.)

Der zweite Beweis (den wir als ersten gefunden haben) ist technisch komplizierter, er verwendet Äquivariante Hindernistheorie, die man aus dem Buch von Tammo tom Dieck über Transformationsgruppen [18, Sect. II.3] lernen und dann konkret anwenden kann. Dabei muss man sorgfältig arbeiten, weil die dabei betrachtete Wirkung der symmetrischen Gruppe nicht frei ist. Dieser kompliziertere Beweis liefert aber auch mehr, nämlich dass unser Konfigurationsraum/Testabbildungs-Ansatz auch bei Verwendung der vollen Symmetrie *dann und nur dann* funktioniert, wenn $(r-1)!^d$ nicht durch r teilbar ist, also nur wenn r Primzahl ist, und für den uninteressanten Fall $r = 4$, $d = 1$. Der dritte Beweis, auch aus [8], ist der komplizierteste, er berechnet den Fadell–Husseini-Index, ein Ideal in der Gruppenkohomologie. Aber er liefert auch noch mehr: Er beweist das ganze Resultat direkt, ohne vorherige geometrische Reduktion auf den Spezialfall von Farbklassen der Größe $d-1$ bzw. 1, und kann deshalb auf einen Beweis der transversalen Verallgemeinerung des neuen farbigen Tverberg-Satzes erweitert werden.

> *Proofs should be communicated*
> *only by consenting adults in private.*
>
> Victor Klee (U Washington)

6 Fragen, Probleme, Herausforderungen

1. Für den klassischen Tverberg-Satz gibt es wie oben erwähnt einen „elementaren" Lineare Algebra-Beweis von Sarkaria, der für *alle* $r \geq 2$ funktioniert. Gibt es einen ähnlichen Beweis auch für den affinen Fall des neuen gefärbten Tverberg-Satzes?
2. Die Tverberg-Sätze, ob gefärbt oder auch nicht, versprechen die *Existenz* einer bestimmten Art von Zerlegung für gegebene Punktkonfigurationen. Wie *findet* man die? Ist es einfach, eine solche Zerlegung auch zu finden, kann man also eine Lösung in Polynomialzeit *berechnen*? Das ist überhaupt nicht klar – allerdings auch nicht für den wohl noch einfacheren „gefärbten Carathéodory-Satz" von Bárány [2] [12, Sect. 8.2]
3. Wer mit dem Tverberg-Satz experimentiert, der beobachtet, dass es typischerweise nicht nur eine, sondern *sehr viele* Tverberg-Zerlegungen gibt. In der Konfiguration von $(d+1)(r-1)+1$ Punkten im $\mathbb{R}^d$, die unsere dritte Abbildung nahelegt, gibt es etwa genau $(r-1)!^d$ verschiedene Zerlegungen. Gerard Sierksma aus Groningen hat vermutet, dass es immer (also für alle Punktkonfigurationen) mindestens $(r-1)!^d$ Zerlegungen gibt. Auf den Beweis der Vermutung hat er einen ganzen Gouda ausgesetzt, weswegen man sie als Sierksma's „Dutch Cheese Problem" kennt. Das Problem ist aber nicht einmal für den Fall $d = 2$ bewiesen. Untere Schranken für die Anzahl der Lösungen gibt es von Aleksandar Vučić und Rade Živaljević [21] im Primzahlfall und von Stephan Hell [10] für Primzahlpotenzen. Es könnte ja sein, dass eine geeignete untere Schranke für das *gefärbte* Problem sich leichter beweisen lässt und dann auch für das *ungefärbte* Problem verwendet werden kann.

4. Der Nicht-Primzahlfall ist weiterhin eine Herausforderung. Für $d = 2$ habe ich ihn mit Torsten Schöneborn [17] als konkretes Graphenzeichnen-Problem formuliert. Für den kleinsten offenen Fall, $r = 6$, fragen wir also: Gibt es für jede Zeichnung des vollständigen Graphen K_{16} in der Ebene entweder eine der Ecken, die durch fünf Dreiecke umschlungen wird (mit Windungszahl ungleich Null), oder aber eine Kreuzung von zwei Kanten, die durch vier Dreiecke umschlungen wird? Gegenbeispiel?

I was of course flabbergasted by the variety of generalisations that have blossomed in that particular garden!

Bryan Birch (2010)

Danksagung

Ich danke meinen Koautoren für die wunderbare Zusammenarbeit und der *Lufthansa* für den Businessclass-Upgrade auf dem Weg zum ICM nach Hyderabad.

Literatur

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, 3. Auflage, Springer, Heidelberg, 2009.
[2] I. Bárány, *A generalization of Carathéodory's theorem*, Discrete Math., 40 (1982), 141–152.
[3] I. Bárány, Z. Füredi, and L. Lovász, *On the number of halving planes*, Combinatorica, 10 (1990), 175–183.
[4] I. Bárány and S. Onn, *Carathéodory's theorem, colourful and applicable*, in "Intuitive Geometry" (Budapest, 1995), Bolyai Soc. Math. Studies 6, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1997, 11–21.
[5] I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szűcs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc. (2), 23 (1981), 158–164.
[6] B. J. Birch, *On 3N points in a plane*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 55 (1959), 289–293.
[7] P. V. M. Blagojević, B. Matschke, and G. M. Ziegler, *Optimal bounds for the colored Tverberg problem*. Preprint, October 2009, 10 pages; revised November 2009, 11 pages; http://arXiv.org/abs/0910.4987.
[8] —, *Optimal bounds for a colorful Tverberg–Vrećica type problem*. Preprint, November 2009, 11 pages; http://arXiv.org/abs/0911.2692.
[9] M. de Longueville, *25 Jahre Beweis der Kneservermutung*, Mitteilungen der DMV, (2003), 8–11.
[10] S. Hell, *On the number of Tverberg partitions in the prime power case*, European J. Combinatorics, 28 (2007), 347–355.
[11] G. Kalai, *Sarkaria's proof of Tverberg's theorem*. Two blog entries, November 2008, http://gilkalai.wordpress.com/2008/11/24/sarkarias-proof-of-tverbergs-theorem-1/.
[12] J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry*, Graduate Texts in Math. 212, Springer, New York, 2002.
[13] —, *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer, Heidelberg, 2003.
[14] J. Matoušek, M. Tancer, and U. Wagner, *A geometric proof of the colored Tverberg theorem*. Preprint, September 2010, http://arxiv.org/abs/1008.5275.
[15] R. Rado, *A theorem on general measure*, J. London Math. Soc., 21 (1946), 291–300.
[16] K. Sarkaria, *Tverberg's theorem via number fields*, Israel J. Math., 79 (1992), 317–320.
[17] T. Schöneborn and G. M. Ziegler, *The Topological Tverberg Problem and winding numbers*, J. Combinat. Theory, Ser. A, 112 (2005), 82–104.
[18] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Studies in Mathematics 8, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.
[19] H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem*, J. London Math. Soc., 41 (1966), 123–128.
[20] —, *A combinatorial mathematician in Norway: some personal reflections*, Discrete Math., 241 (2001), 11–22.
[21] A. Vučić and R. T. Živaljević, *Note on a conjecture of Sierksma*, Discrete Comput. Geom., 9 (1993), 339–349.
[22] R. T. Živaljević and S. Vrećica, *Chessboard complexes indomitable*. Preprint, November 2009, 11 pages, http://arxiv.org/abs/0911.3512v1.
[23] —, *The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions*, J. Combin. Theory, Ser. A, 61 (1992), 309–318.

Prof. Günter M. Ziegler, Institut für Mathematik, MA 6-2,
TU Berlin, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de

Günter M. Ziegler interessiert sich – wie man sieht – unter anderem für Geometrie, Kombinatorik und Topologie. Um Brücken zwischen diesen und anderen Teilgebieten geht es in seinem ERC Advanced Grant „Structured Discrete Models" (2010–). 1997–2000 hat er die *Mitteilungen* herausgegeben, seitdem schreibt er die Kolumne „Mathematik im Alltag". 2006–2008 war er Präsident der DMV.