Rekorde im Silvesterknallen

Günter M. Ziegler

I

Ein bemerkenswerter Weltrekord ist vermutlich im Champagnerkorkenknallen für das Jahr $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ untergegangen: Am letzten Tag des Jahres $2009 = 7\cdot 7\cdot 41$ hat der französische Programmierer Fabrice Bellard auf seiner Website bellard.org die Berechnung der Kreiszahl π auf sagenhafte 2.699.999.990.000 Nachkommastellen bekanntgegeben. Das sind fast 2,7 Billionen Stellen, und damit 123 Milliarden mehr als bisherige Rekord.

Mich freut das, weil es eine David-gegen-Goliath-Geschichte ist: Das Wettrennen um die π-Weltrekorde wird ja auch von den Supercomputer-Produzenten propagiert, die sich damit Publicity für ihre Paradepferde erhoffen. Sehr lange hielt sich dabei ein π-Weltrekord vom November 2002 auf der internationalen Rekordliste: der Japaner Yasumasa Kanada und sein Team hatten auf einem Hitachi-Supercomputer SR8000/MPP mit 144 Prozessoren und mehr als 600 Stunden Rechenzeit die ersten 1,24 Billionen Stellen berechnet. Der Rekord hielt bis zum 17. August 2009, und wurde wieder in Japan gebrochen: Professor Daisuke Takahashi verwendete einen Supercomputer an seiner Universität in Tsukuba (nordöstlich von Tokyo), der eine Spitzenleistung von 95 Billionen Gleitkommaoperationen (Teraflops) in der Sekunde erreichte, für eine Rechnung, die dann immer noch 73 Stunden und 36 Minuten brauchte: die Berechnung von 2,577 Billionen Dezimalstellen und ihre Überprüfung.

Der neue Weltrekord hielt ganze 136 Tage – bis eben am 31. Dezember Fabrice Bellard sein Ergebnis verkündete. Und damit die Japaner wohl ziemlich düpierte. Denn Bellard verwendete keinen der superteuren japanischen Supercomputer, sondern einen einzigen, fast handelsüblichen PC für weniger als 2000 Euro. Er verwendete eine Formel der Chudnovsky-Brüder aus dem Jahr 1987,

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!\,(545140134n + 13591409)}{(3n)!(n!)^3\, 640320^{(6n+3)/2}},$$

die mit jedem Summanden 14 neue Dezimalstellen liefert. Diese Art von Formeln hat zuerst Ramanujan aufgestellt, dem wir etwa das nur wenig „harmlosere“

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!\,(26390n + 1103)}{(n!)^4\, 396^{4n}},$$

verdanken. (Zu Ramanujans bemerkenswerten Formeln verweise ich auf den Beitrag von Don Zagier auf Seite 21.)

II

Wie dicht kann man gleich-große reguläre Tetraeder im Raum packen? Aristoteles soll behauptet haben, dass es eine perfekte Packung gibt, in der sie den Raum zu 100 % ausfüllen. Das stimmt nicht, aber es kommt noch schlimmer. In einem preisgekrönten Aufsatz „Which Tetrahedra Fill Space?“ (*Mathematics Magazine* 54 (1981), 227–243) zitiert Majorie Senechal Aristoteles aus *De Caelo* III, 306b so:

> It is agreed that there exist only three plane figures that can fill a place, the triangle, the quadrilateral, and the hexagon, and only two solid bodies, the pyramid and the cube.

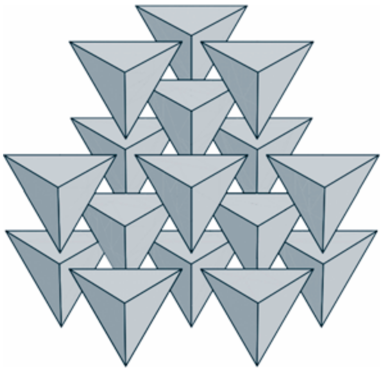
Offenbar werden da nur reguläre Vielecke bzw. Körper betrachtet, und mit „pyramid“ ist der Tetraeder gemeint. Und mit den Tetraedern könne man den Raum lückenlos auffüllen – das behauptet Aristoteles nicht nur, sondern er sagt, das „sei bekannt.“ Und wenn der große Aristoteles das schon als altbekannt herausstellt, dann traut sich so schnell auch keiner, das in Frage zu stellen.

Der Irrtum hielt sich also immerhin fast 1800 Jahre, bis Johannes Müller, genannt Regiomontanus (1436–1476), ein Wegbereiter der modernen Trigonomietrie, den Irrtum aufdeckte. Sein Manuskript *De quinque corporibus aequilateris quae vulgo regularis nuncupantur: quae videlicet eorum locum impleant corporalem & quae non. contra commentatorem Aristotelis Averroem* [Über die fünf gleichseitigen Körper die üblicherweise regulär genannt werden: welche von ihnen ihren Raum ausfüllen und welche nicht. im Widerspruch zum Kommentator von Aristoteles, Averroes] gilt offenbar als verloren, also wissen wir auch nicht, was er wirklich beigetragen hat. Dass die Aristoteles-Behauptung falsch ist, kann man mit etwas Trigonometrie und einem Taschenrechner leicht nachrechnen: der Kantenwinkel im regulären Tetraeder ist $\arccos\frac{1}{3} = 70{,}528^\circ$, also knapp weniger als ein Fünftel von 360°. Aber diese Trigonometrie hatten Aristoteles und seine Zeitgenossen nicht zur Verfügung (vgl. Seite 10).

Also sind 100 % nicht zu erreichen, aber wie dicht kann man Tetraeder packen? Würfel lassen eine perfekte Packung zu (die man in Würfelzucker-Packungen bestaunen kann). Mit gleichgroßen Kugeln kann man 74,05 % erreichen – das war die Kepler-Vermutung, die 1998 von Hales und Fergusson bewiesen wurde.

Aber Tetraeder? Wie dicht kann ein „Sand“ sein, dessen Körnchen lauter gleich-große, reguläre Tetraeder sind? Das Problem ist noch recht einfach, wenn man annimmt, dass alle Tetraeder die gleiche Ausrichtung im Raum haben, und zudem gitterförmig angeordnet sind. Dann füllt die dichteste mögliche Packung lediglich $\frac{18}{49} = 36{,}73\,\%$ des Raums aus:

MDMV 18/2010 | 16–17



Die dichteste Tetraeder-Gitterpackung (aus: Conway & Torquato, PNAS *2006)*

Wenn man auf die „Gitterstruktur" verzichtet, dann wird die optimale Packung dichter, und komplizierter. Und wenn man auch noch erlaubt, die Tetraeder einzeln zu drehen, dann wird's richtig kompliziert. Tetraeder-Tetris: man kann versuchen, geschickt zu drehen, um Lücken zu füllen. Aber wie dicht kann man den Raum dann ausfüllen?

Das Problem geriet erst vor kurzem ins Zentrum der Forschung – und wurde Gegenstand eines Wettrennens, an dem sich Wissenschaftler (und Wissenschaftlerinnen!) aus ganz unterschiedlichen Disziplinen beteiligt haben, und über das die *New York Times* kürzlich berichtet hat. (Siehe www.nytimes.com/2010/01/05/science/05tetr.html!) Den Startschuss lieferten 2006 John H. Conway, ein legendärer Geometer und Gruppentheoretiker aus Princeton, und Salvatore Torquato, ein Kollege aus der Chemie. Sie haben ein bemerkenswert schlechtes Ergebnis erzielt und in den *Proceedings of the National Academy of Sciences* publiziert: Sie kamen über 72 % des Raums nicht hinaus – schlechter als die optimale Kugelpackung!

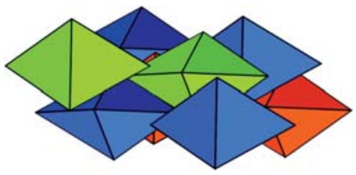
Dies konnte Paul M. Chaikin nicht glauben, ein Physiker von der New York University: Er kaufte eine große Mengen von tetraederförmigen „Würfeln" (wie sie für das Brettspiel „Dungeons & Dragons" verwendet werden), und ließ Schüler damit experimentieren. Für Aquarien voller kleiner Tetraeder kamen sie (mit etwas Schütteln) deutlich über 72 % hinaus. Aber das sind physikalische Experimente, die Mathematiker nicht als Beweis akzeptieren können – schon deshalb, weil die verwendeten Plastik-Tetraeder natürlich leicht abgerundete Ecken und Kanten haben, also keine mathematisch-idealen Tetraeder sein können.

Zur selben Zeit in Michigan ... feuerte der Mathematiker Jeff Lagarias seine Doktorandin Elizabeth Chen an, „Wenn Du Conway und Torquato übertreffen kannst, dann ist das sehr gut für Dich!" soll er ihr gesagt haben. Chen analysierte viele verschiedene mögliche Konfigurationen und kam im August 2009 schließlich auf immerhin 78 % [arXiv:0908.1884]. Lagarias wollte das erst gar nicht glauben!

Zur selben Zeit ... an der selben Uni, aber in der Fakultät für Verfahrenstechnik (*Chemical Engineering*) interessierte sich Professor Sharon C. Glotzer für Tetraederpackungen: Sie und ihre Kollegen wollten sehen, ob sich Tetraeder in kristallinen Strukturen anordnen, wie sie das aus Flüssigkeitskristallen kannten. Dafür schrieben sie Computerprogramme, um das Schütteln und Anordnen von Tetraedern zu simulieren – und fanden eine komplizierte, „quasikristalline" Struktur, die aus Wiederholungen eines Grundmusters von 82 Tetraedern bestand. Kompliziert, aber dicht: 85,03 %! Während die Ergebnisse zur Publikation in *Nature* vorbereitet wurden, kamen Konkurrenten aus der Deckung: Kallus, Elser & Gravel von der Cornell University fanden eine viel einfachere Packung [arXiv:0910.5226], in der sich eine Konfiguration aus nur vier Tetraedern wiederholt. (Nicht klar ist, warum dieses einfache Muster in den Simulationen von Sharon Glotzer nicht aufgetreten war.) Dichte: 85,47 %.

Aber das Rennen ging weiter – kurz vor Weihnachten brachte es Salvatore Torquato mit seinem Doktoranden Yang Jiao auf 85,55 %: die beiden hatten die Cornell-Lösung unter die Lupe genommen und leicht verbessert [arXiv:0912.4210]. War das nun das Ende der Fahnenstange?

Nein! Am 26. Dezember schlug Elizabeth Chen zurück: Ihr Preprint, kurz nach Sylvester im arXiv eingereicht [arXiv:1001.0586] (gemeinsame Arbeit mit der schon erwähnten Sharon Glotzer und Michael Engel aus dem Chemical Engineering Department) beschreibt eine weitere Verbesserung des Cornell-Kristalls, die sie durch systematische Optimierung gewonnen wurde.



Eine optimierte Konfiguration von $N = 16$ Tetraedern, in der sich eine bestimmte Konfiguration von zwei Doppeltetraedern wiederholt (aus Chen et al.).

Dichte: $\frac{4000}{4671} = 85{,}6347\,\%$. Und das ist der aktuelle Rekord – soweit ich weiß.

Wo liegt das Ende der Fahnenstange? Das weiß ich nicht, und offenbar gibt es überhaupt keine guten Abschätzungen, wie weit man vom Optimum entfernt sein könnte. Vielleicht sind die 85,6347 % optimal, vielleicht geht es viel besser. Jetzt sind obere Schranken gefragt, und die sind nicht durch Konstruktionen zu gewinnen, sondern erfordern wohl ganz andere mathematische Methoden. Ich erwarte, dass jetzt ein Wettrennen vom anderen Ende her beginnt: Wer kann zeigen, dass mehr als 95 % mit gleich-großen Tetraedern nicht zu erreichen sind?

Letztes Gerücht: Yoav Kallus soll eine obere Schranke $1 - 10^{-26}$ für die Dichte bewiesen haben.

Prof. Günter M. Ziegler, MA 6-2, TU Berlin, Str. des 17. Juni 136, 10623 Berlin. ziegler@math.tu-berlin.de