Waben-Sudoku

Günter Aumann und Klaus Spitzmüller

Sudoku ist „in". Oder ist es schon wieder langweilig? Es gibt Alternativen.

Eine Vorüberlegung

Reguläre Vierecke und Sechsecke zeichnen sich vor allen anderen regulären Polygonen durch folgende Eigenschaft aus: Teilt man alle Kanten in $n-1$ gleiche Teile und zeichnet durch die so entstandenen n Punkte je Kante die Parallelen zu den Kanten, so erhält man ein Raster, bei dem durch jeden Rasterpunkt eine Gerade jeder Parallelenschar geht (siehe Abbildung 1).

Beim Beweis dieser Behauptung ist zunächst festzuhalten, dass nur Polygone mit einer geraden Eckenzahl in Frage kommen, da bei einer ungeraden Anzahl durch keine Ecke eine Parallele zur gegenüberliegenden Kante geht (man betrachte das Dreieck in Abbildung 1). Da beim Quadrat die Aussage klar ist, können wir also von einem regulären $2N$-Eck mit $N > 2$ ausgehen. Der Innenwinkel sei $\alpha\,(> \frac{\pi}{2})$. Wir betrachten eine Kante $k = \overline{PQ}$ mit ihren Nachbarkanten e und f. Die zu P nächstgelegenen Rasterpunkte des Randes seien $R \in e$ und $T \in k$ (siehe Abbildung 2).

Die Parallele zu k durch R schneidet die Parallele zu e durch T in einem Punkt S. Durch diesen Punkt muss auch eine Parallele zu f verlaufen. Da der Streckenzug $R-P-T$ keine weiteren Rasterpunkte enthält, muss diese mit PS zusammenfallen. Da PS den Winkel $\angle RPT$ der Raute $PTSR$ halbiert, gilt

$$PS \parallel f \iff \pi - \alpha = \frac{\alpha}{2} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Diese Bedingung ist genau für das reguläre Sechseck erfüllt.

Das Quadrat ist die ideale Sudoku-Figur, da hier jede Gerade genau n (im Standardfall $n = 9$) Rasterpunkte enthält, die so mit Zeichen (im Standardfall mit den Ziffern 1 bis 9) zu belegen sind, dass jedes Zeichen in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt (siehe Abbildung 3a). Dazu kommt eine weitere, davon unabhängige Bedingung. Im Standardfall fordert man, dass in den Blöcken der Abbildung 3b jede Ziffer genau einmal auftritt.

Beim regulären Sechseck enthält jede Gerade *mindestens* n Rasterpunkte. Hier erhält man eine Sudoku-Figur, indem man unter diesen Punkte so auswählt, dass jede Gerade gleich viele Punkte erhält. Der Reiz des Sechsecks gegenüber dem Quadrat besteht darin, dass beim Sechseck durch jeden Punkt nicht zwei, sondern drei Geraden verlaufen. Dies ergibt für jeden Punkt drei symmetrische Bedingungen. Es wird sich zeigen, dass – ähnlich

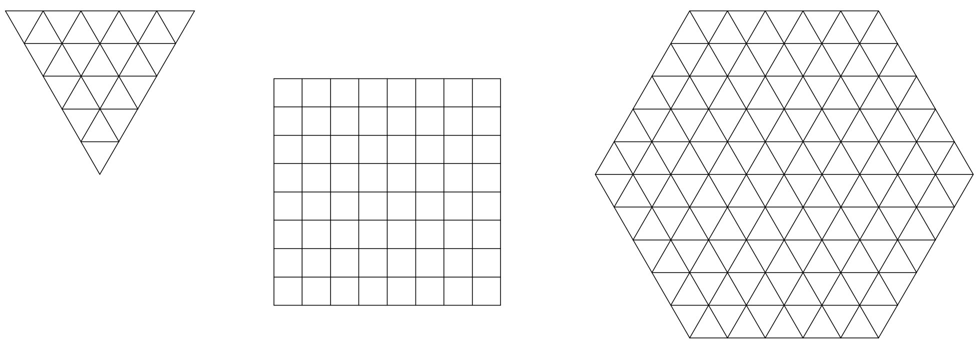


Abbildung 1. *Das Raster*

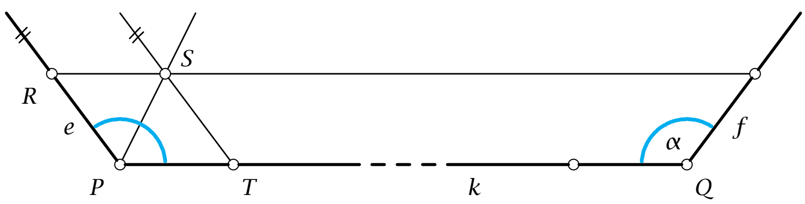
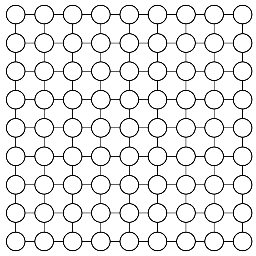


Abbildung 2. *Das Sechseck*



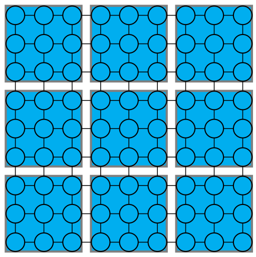


Abbildung 3. *Das klassische Sudoku*

zur Blockbedingung beim klassischen Sudoku – auch beim Sechseck eine zusätzliche (in diesem Fall vierte) Bedingung möglich ist.

66 Punkte

Wir haben gesehen, dass beim Sechseck nicht jeder Rasterpunkt mit einem Punkt belegt werden darf. Wir gehen aber in einem ersten Ansatz davon aus, dass zumindest jeder Rasterpunkt auf dem Rand einen Punkt trägt, alle Geraden also genau n Punkte enthalten.

Beim klassischen Sudoku ist die Zahl der senkrechten oder waagrechten Geraden notwendig eine Quadratzahl. Beim Sechseck ist prinzipiell jede Anzahl möglich. Wir wählen zunächst $n = 6$ (siehe Abbildung 1). Dies ergibt $3 \cdot 11 = 33$ Geraden, $11 \cdot 6 = 66$ Punkte und 91 Rasterpunkte. Will man die Symmetrien des Sechsecks erhalten, lassen sich auf diese Rasterpunkte auf genau eine Weise die 66 Punkte so verteilen, dass auf jeder Geraden genau 6 Punkte liegen (siehe Abbildung 4).

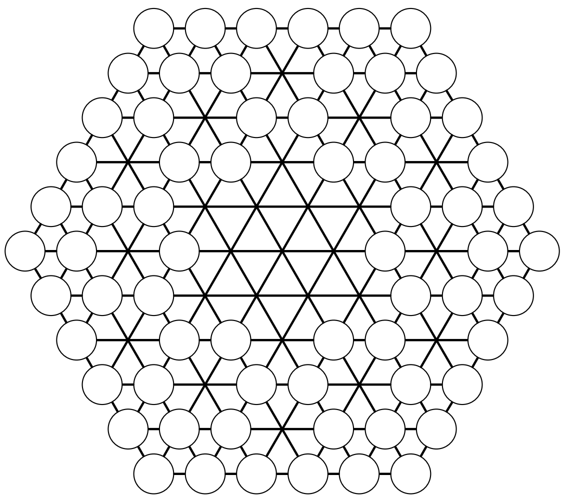


Abbildung 4. *Die Verteilung der Zahlen*

Die Aufgabe besteht nun darin, diese Punkte so mit den Zahlen 1 bis 6 zu belegen, dass auf keiner Geraden eine Zahl mehrfach vorkommt. Die 33 Geraden liefern für die 66 Punkte 33 Bedingungen, was ein Verhältnis 1 : 2 zwischen Bedingungen und Punkten ergibt. Bekanntlich lautet dieses Verhältnis beim klassischen Sudoku $(3 \cdot 9) : 81 = 1 : 3$. Dies liegt allerdings an der unterschiedlichen Länge der Geraden; pro Punkt sind in beiden Ansätzen genau drei Bedingungen zu erfüllen. Erhöhen kann man die Anzahl der Bedingungen durch zusätzliche Forderungen:

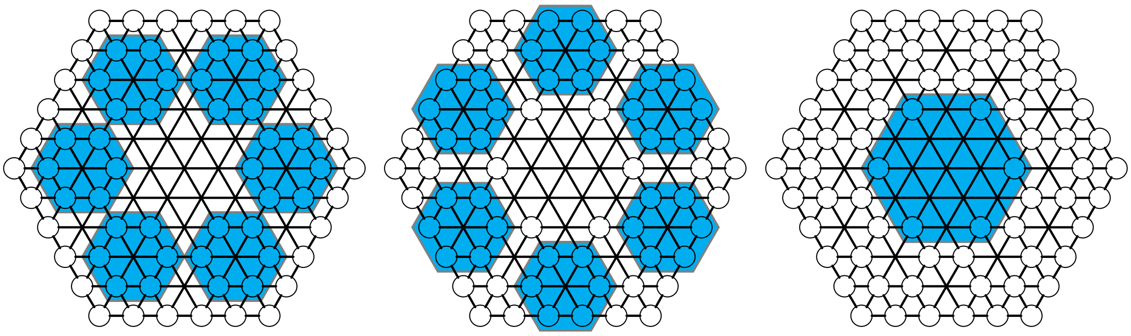
- In jedem der in Abbildung 5a markierten Ecksechsecke sollen alle sechs Zahlen auftreten.
- In jedem der in Abbildung 5b markierten Mittensechsecke sollen alle sechs Zahlen auftreten.
- Man fordert dies nur für einen Teil der genannten Sechsecke.
- Die Eckpunkte des (äußeren) Sechsecks sollen verschiedene Nummern tragen.
- Die Eckpunkte des innersten Sechsecks sollen verschiedene Nummern tragen (siehe Abbildung 5c).

Sieht man von den Permutationen einer beliebig vorgegebenen Zeile ab (die einen zusätzlichen Faktor $6! = 720$ liefern), erhält man das in Tabelle 1 gezeigte Ergebnis. Man sieht, dass bei jeder Lösung die 6 Eckpunkte des Ausgangssechsecks automatisch paarweise verschieden besetzt werden.

Tabelle 1. *Varianten*

Zusatzforderungen	Anzahl der Lösungen
keine	766
sechs Ecksechsecke	2
ein Ecksechseck	26
zwei gegenüberliegende Ecksechsecke	12
zwei benachbarte Ecksechsecke	9
zwei sonstige Ecksechsecke	2
sechs Mittensechsecke	36
die sechs äußeren Ecken	766
die sechs inneren Ecken	538

Die beiden Lösungen, die man für die Zusatzforderung von Abbildung 5a erhält, wenn man die oberste Horizontalzeile als $1, 2, 3, 4, 5, 6$ vorgibt, zeigt die Abbildung 6. Man sieht, dass die Kanten des Sechsecks in beiden Lösungen übereinstimmen. Betrachtet man in jedem Ecksechseck von 1 ausgehend die Zahlenfolge im Uhrzeigersinn, erkennt man ferner,



(a) (b) (c)

Abbildung 5. *Zusatzforderungen: Ecksechsecke, Mittensechsecke, Innensechseck*

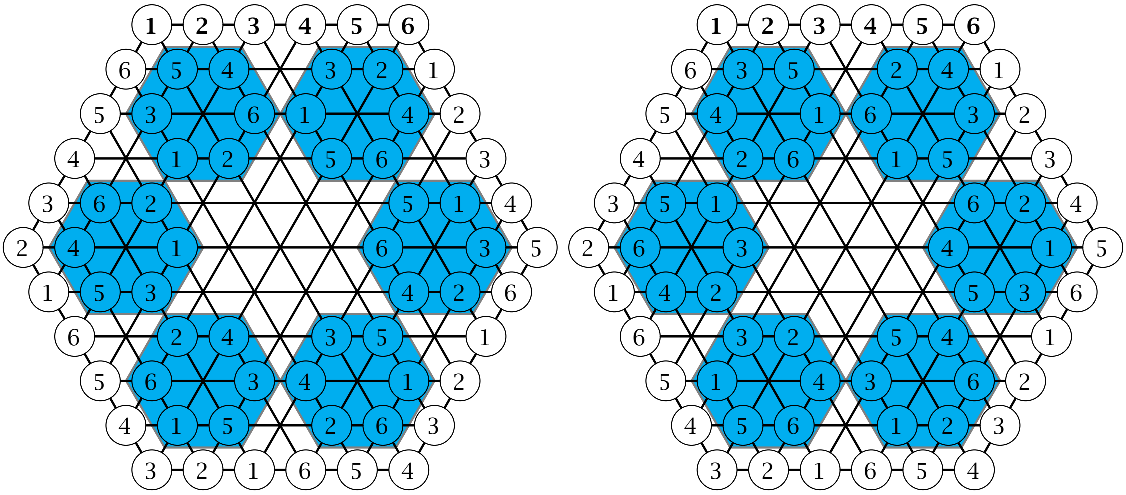


Abbildung 6. *Zusatzbedingung Ecksechsecke*

– dass jeweils drei Paare identischer Zahlenfolgen auftreten, die benachbart und um 120° gedreht sind,
– dass die zweite Lösung aus der ersten durch Vertauschung gegenüberliegender Ecksechsecke entsteht.

Die Abbildungen 7 bis 9 zeigen einige (eindeutig lösbare) Vorlagen (ohne Zusatzforderungen).

Variationen

Was passiert, wenn man die Zahl n der Punkte einer Geraden variiert? Es liegt nahe, möglichst viele von den Symmetrien des regulären Sechsecks bei der Konstruktion des Punktmusters zu erhalten. Zu betrachten sind also die Spiegelungen an den langen Diagonalen d_i $(i = 1, 2, 3)$ des Sechsecks sowie an den Mittelsenkrechten m_i $(i = 1, 2, 3)$ seiner Kanten.

Für $n = 2$ ist die Lösung einfach und (bis auf Vertauschung von 1 und 2) eindeutig (siehe Abbildung 10).

Geht man zu drei Punkten über, so sieht man schnell, dass es (bis auf Spiegelungen an den Mittelsenkrechten) genau ein mögliches Muster gibt. Dieses ist symmetrisch zu den Diagonalen d_i $(i = 1, 2, 3)$ des Sechsecks. Gibt man beim Lösungsversuch wieder die oberste Horizontalzeile vor (siehe Abbildung 11a), so liegt auch das mittlere Element der zweiten Zeile (als 1) und damit die gesamte zweite Zeile fest. Nun kennt man von vier Geraden jeweils zwei Punkte, so dass man den dritten eintragen kann (siehe Abbildung 11b). Man erkennt, dass der Fall $n = 3$ keine Lösung besitzt.

Für $n = 4$ sieht man leicht, dass kein Muster existert, das symmetrisch zu den Mittelsenkrechten ist. Die meisten Symmetrien (nämlich bezüglich der drei Diagonalen d_i) besitzt das in Abbildung 12a gezeigte Muster, das allerdings keine Lösung besitzt. Zwei orthogonale Symme-

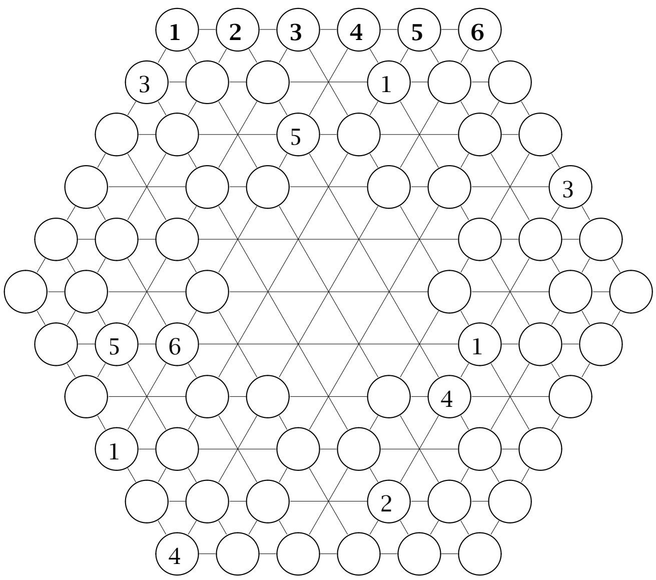


Abbildung 7. *Aufgabe 1 (leicht)*

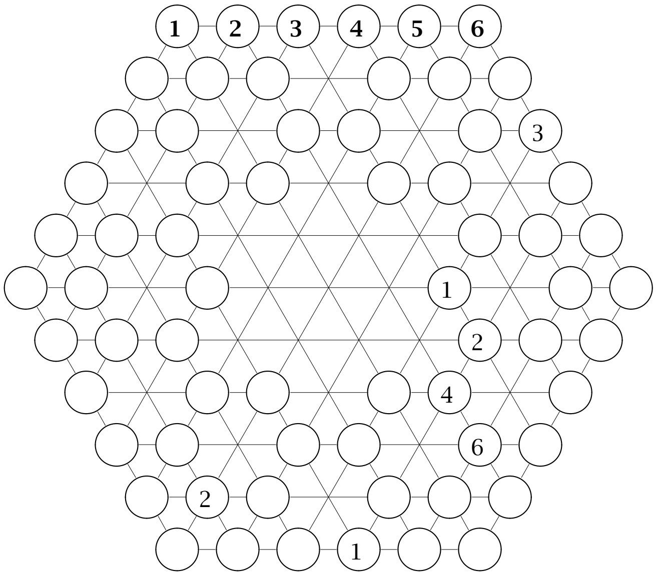


Abbildung 8. *Aufgabe 2 (mittel)*

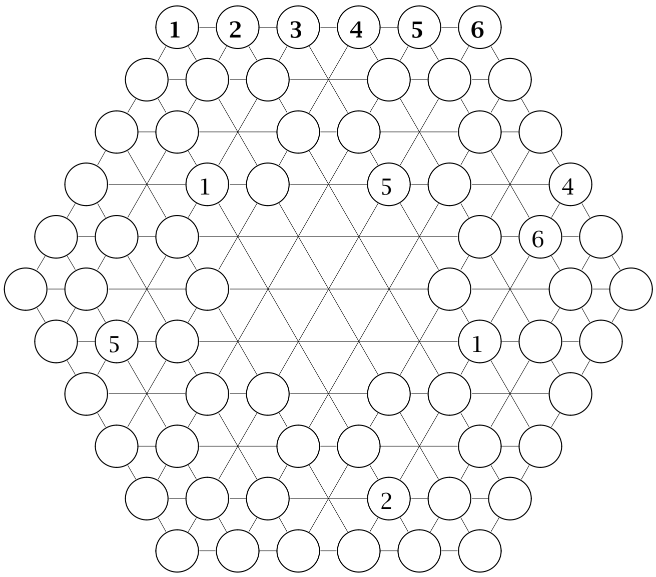


Abbildung 9. *Aufgabe 3 (sehr schwer)*

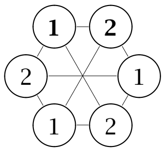


Abbildung 10. *Minimalmodell*

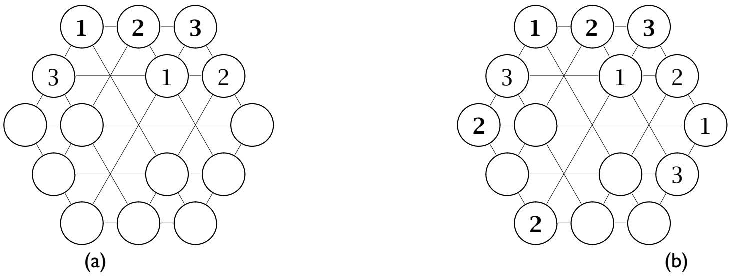


Abbildung 11. *Der unlösbare Fall* $n = 3$

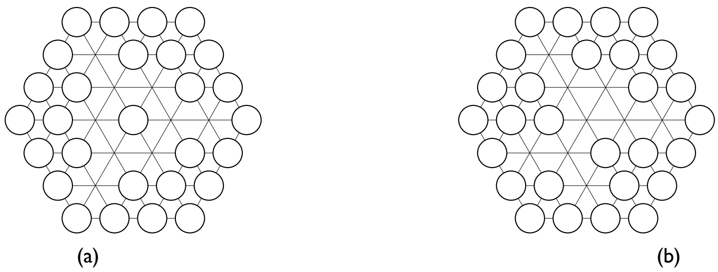


Abbildung 12. *Unlösbare Fälle* ($n = 4$)

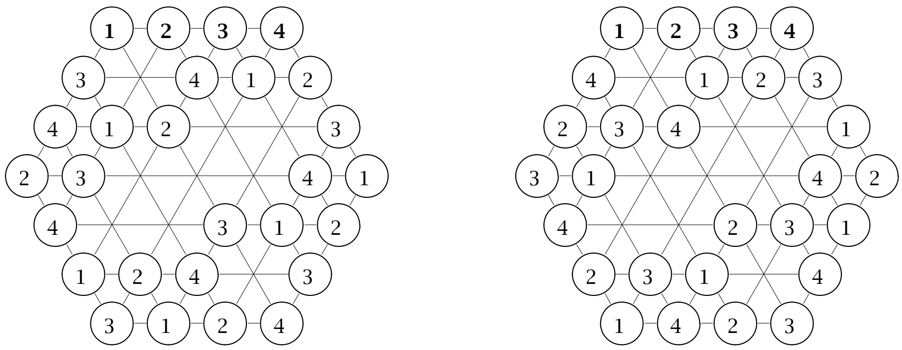


Abbildung 13. *Der lösbare Fall* $n = 4$

trieachsen (nämlich eine Mittelsenkrechte und die dazu orthogonale Diagonale) und damit Punktsymmetrie bezüglich des Mittelpunkts besitzt das in Abbildung 13 gezeigte Muster. In dieser Abbildung sind auch die beiden einzigen Lösungen zu sehen (bei Vorgabe einer – hier der obersten – Zeile). Es bleibt noch eine Möglichkeit übrig, die in Abbildung 12b zu sehen ist. Sie besitzt genau eine Diagonale als Symmetrieachse, ist aber wieder unlösbar.

Die Fälle $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ sind also im Unterschied zum Fall $n = 6$ unter Sudoku-Gesichtspunkten nicht ergiebig. Wie sieht es mit weiteren Fällen aus? Will man sich auf die Ziffern 0 bis 9 beschränken, gilt notwendig $n \leq 10$. Für diese Fälle listet die Tabelle 2 die entstehenden Zahlenkombinationen auf. Statt die noch ausstehenden Fälle zu untersuchen, verfolgen wir im nächsten Abschnitt einen anderen Ansatz.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geraden	$3 \cdot 3$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 7$	$3 \cdot 9$	$3 \cdot 11$	$3 \cdot 13$	$3 \cdot 15$	$3 \cdot 17$	$3 \cdot 19$
Punkte	6	15	28	45	66	91	120	153	190

Tabelle 2. *Die Minimalzahlen*

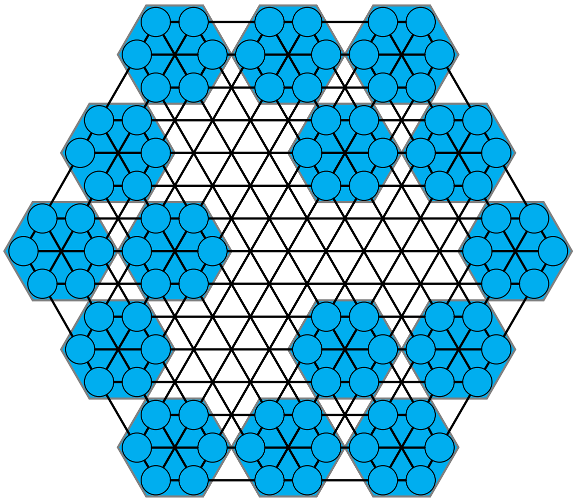


Abbildung 14. *90 Punkte*

Randlücken

Bisher wurden alle Rasterpunkte auf dem Rand des Sechsecks mit Punkten belegt. Lässt man auch Lücken zu, ergeben sich neue Möglichkeiten. Ein besonders interessanter Fall wird im Folgenden untersucht.

Wir wählen $n = 8$ und sechs Punkte je Kante. Eine mögliche Verteilung zeigt die Abbildung 14. Dieses Sudoku besteht aus 90 Punkten und $3 \cdot 15 = 45$ Geraden. Die vorne nur ansatzweise erkennbare zusätzliche Möglichkeit, die Punkte zu regulären Sechsecken zusammenzufassen, liegt hier vollständig vor. Dies gibt weitere 15 Bedingungen und damit vier Bedingungen pro Punkt. Betrachtet man jedes Sechseck als Punkt, ist dies genau die vorne für $n = 3$ betrachtete und als eindeutig nachgewiesene Struktur.

Bei Vorgabe einer Zeile (also bis auf Permutationen) gibt es $8\,786$ Lösungen, inklusive der Permutationen also $6! \cdot 8\,786 = 6\,325\,920$ Lösungen. Unter diesen $8\,786$ Lösungen gibt es natürlich keine achsensymmetrischen Lösungen (man betrachte ein von einer potentiellen Achse halbiertes Sechseck). Es gibt jeweils 256 Lösungen,

- bei denen die großen Diagonalen
- bei denen die drei inneren Sechsecke
- die als Ganzes

invariant unter Drehungen um 120° (und damit auch um 240°) sind. Die drei Forderungen sind also äquivalent.

Die Abbildungen 15 bis 18 auf den Seiten 94–95 zeigen (eindeutig lösbare) Aufgabenstellungen verschiedener Schwierigkeitsstufen.

Prof. Dr. Günter Aumann, Dr. Klaus Spitzmüller, Universität Karlsruhe, Institut für Algebra und Geometrie, Kaiserstraße 89–93, 76128 Karlsruhe.
aumann@math.uni-karlsruhe.de
spitzmueller@math.uni-karlsruhe.de

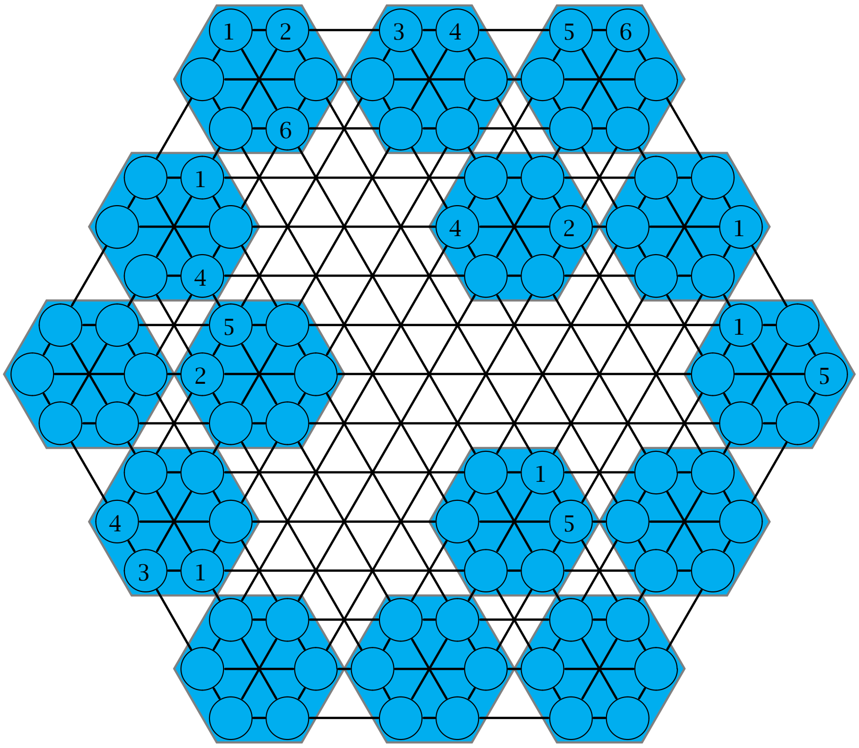


Abbildung 15. *Aufgabe 4 (leicht)*

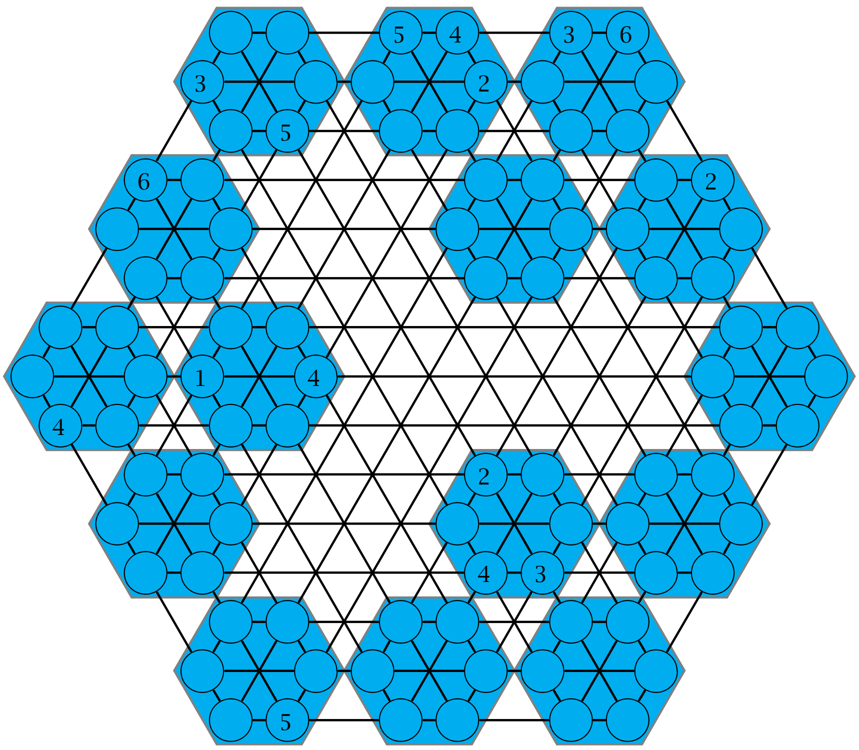


Abbildung 16. *Aufgabe 5 (mittel)*

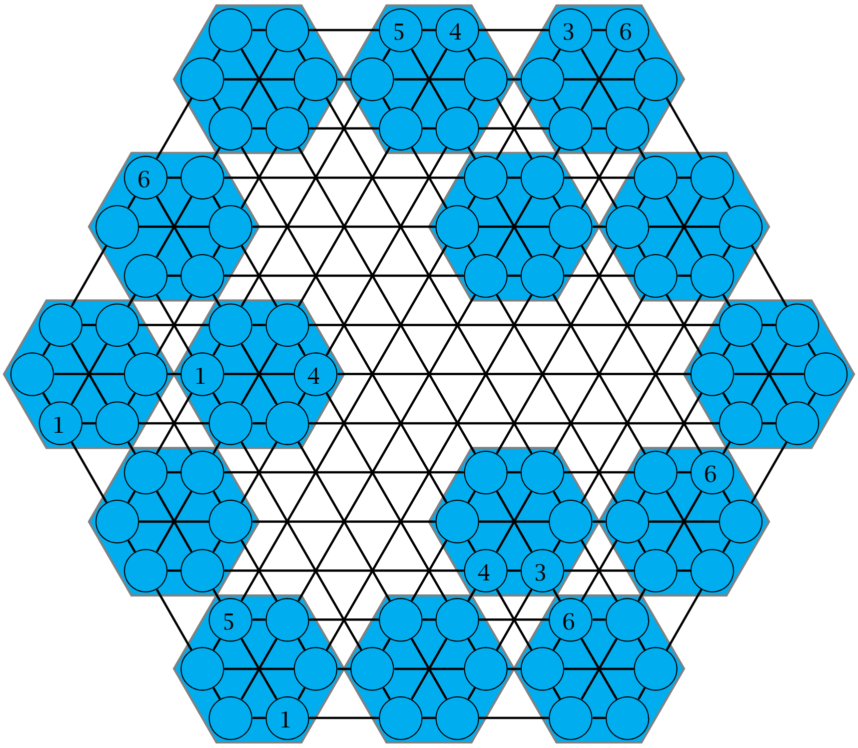


Abbildung 17. *Aufgabe 6 (schwer)*

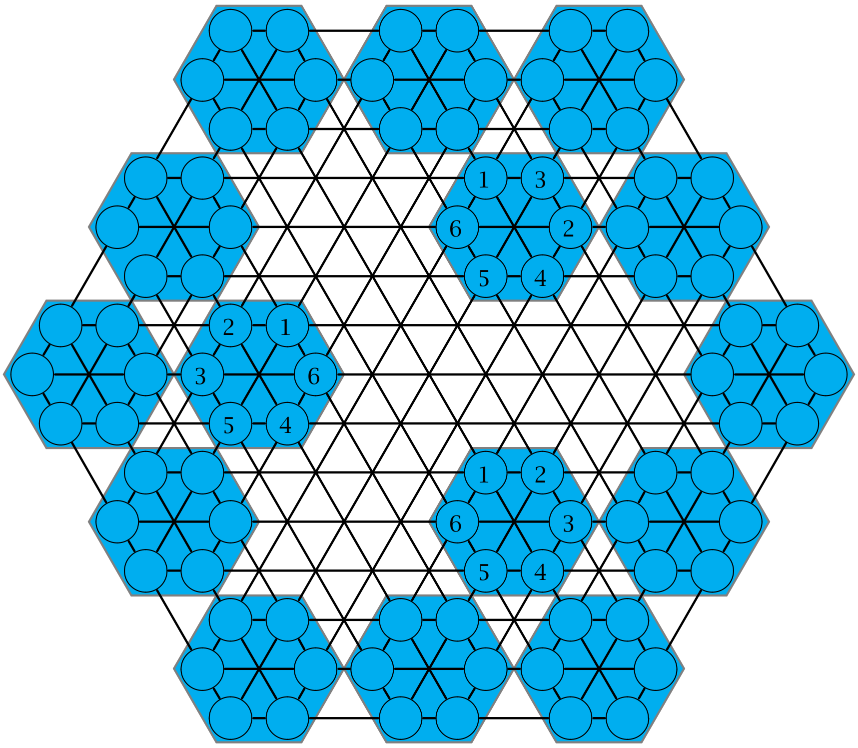


Abbildung 18. *Aufgabe 7 (sehr schwer)*