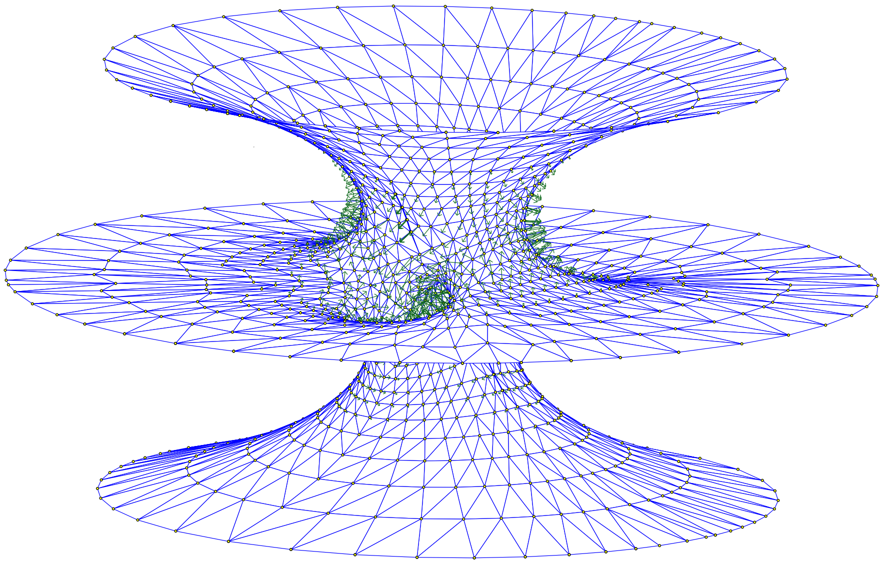

Abb. 1. Costa-Fläche mit Eigenfunktionen.

www.eg-models.de
Digitale geometrische Modelle

von Michael Joswig und Konrad Polthier

EG-Models ist ein neuartiger Internet-Server für digitale geometrische Modelle. Die grundsätzliche Funktionsweise des Archivs orientiert sich am Vorbild einer referierten mathematischen Fachzeitschrift, aber wesentliche Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Wahl des Mediums. Der Zugriff auf die Modelle des Servers ist frei.

Seit einiger Zeit wird mit steigender Intensität über den Einfluss des Computers auf die Mathematik insgesamt diskutiert. Dies betrifft die Ausbildung an Schule und Universität ebenso wie die mathematische Forschung. Zunächst wurde die Mathematik verändert durch den Einsatz von TEX und email. Derzeit ändern sich zusehends die Publikationsgewohnheiten und Recherchemethoden durch das Internet. Die großen Verleger von mathematischen Fachzeitschriften verwenden mehr und mehr Sorgfalt auf ihre parallelen Publikationen im Internet. Oftmals ist die Internet-Version ein paar Tage oder sogar Wochen eher verfügbar als die gedruckte. Avantgardistischer sind die primär elektronisch publizierten Zeitschriften wie *The Electronic Journal of Combinatorics* (`http://www.combinatorics.org`), *Documenta Mathematica* (`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/`) oder *Geometry and Topology* (`http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtp.html`), von denen sich einige längst den Ruf der Erstklassigkeit erarbeitet haben. Dazu kommen Preprint-Server wie der Server in Los Alamos (`http://www.arXiv.org`) mit seinen zahlreichen Spiegeln, die dazu beitragen, die Verbreitung mathematischen Wissens drastisch zu beschleunigen.

Klar ist, dass das Ende der hier nur vage skizzierten Entwicklung längst nicht erreicht ist. Aber wohin soll es gehen? Am Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) in Berkeley gab es Ende 1999 einen viel beachteten Workshop zum Thema *The Future of Mathematical Communication* (`http://www.msri.org/calendar/workshops/9900/Future_of_Math_Communications/`). Dort wurden Aktivitäten in vielerlei Richtung vorgestellt, und um eine der neuen Entwicklungen, die sich im Anschluss an diese Tagung ergaben, soll es hier gehen.

Die oben genannten Aspekte der Entwicklung orientieren sich noch sämtlich am Paradigma der gewohnten gedruckten wissenschaftlichen Veröffentlichung. Eine gänzlich andere Richtung gerät in den Blick, wenn man mathematische wissenschaftliche Publikationen mit mathematischen Modellen zusammen denkt. Im ausgehenden 19. Jahrhunderts begannen Mathematiker wie Hermann Amandus Schwarz und Felix Klein in Göttingen, große Sammlungen von Draht- und Gipsmodellen von mathematischen Kurven und Flächen anzulegen, vor allem, um sie zu didaktischen Zwecken in ihren Vorlesungen zu nutzen. In den meisten mathematischen Instituten gibt es heute noch die eine oder andere Glasvitrine, in der die damals produzierten Objekte verstauben. Eingemottet wurden die Modelle bereits in den dreißiger Jahren, als in der Mathematik das Streben nach immer weiter reichender Abstraktion in den Vordergrund trat. In der Folge blieb die gelegentliche Beschäftigung mit der Konstruktion von mathematischen Modellen von Seiten der Mathematiker vor allem ein der Ästhetik verbundenes historisches Zitat (vgl. etwa [4] und [7]). Am Ende des 20. Jahrhunderts erleben die mathematischen Modelle eine Renaissance, jedoch auf ganz andere Weise. In vielen Bereichen der Mathematik hat der Computer Einzug in die wissenschaftliche Werkzeugkiste gefunden. Der Rechner beweist, konstruiert und visualisiert, aber die Autoren veröffentlichen Ergebnisse, die mit Hilfe von Rechnern produziert wurden, nach wie vor auf dem klassischen Weg. Ab und zu verweist ein Zeitschriftenartikel auf die Homepage des Autors, auf der sich Detailergebnisse und Protokolle der Rechnungen finden. Oft liegen die Daten in einem Format vor, das sich nach den Bedürfnissen des Autors richtet. Der mathematische Fachartikel hat manchmal nur noch die Form des Ergebnisprotokolls eines naturwissenschaftlichen Experiments. Dies stellt unter Umständen die Verifizierbarkeit der Resultate in Frage.

Hier setzen unsere Bemühungen an. Unter `http://www.eg-models.de` haben wir den Webserver *Electronic Geometry Models* aufgesetzt, der ein Forum für die bislang über das Internet verstreuten Aktivitäten sein soll, die Konstruktion und Verfügbarkeit mathematischer Modelle *zu wissenschaftlichen Zwecken* wiederzubeleben. Solche digitalen Modelle lassen sich vielfältig verwenden. Die explizite Konstruktion von geometrischen Objekten erleichtert die Validierung von behaupteten Eigenschaften durch Dritte. Darüber hinaus wird ein experimentelles Arbeiten mit diesen Objekten überhaupt erst ermöglicht. Sofern numerische Berechnungen zu Grunde liegen, stellt die Festlegung auf eine explizite Koordinatendarstellung Vergleichbarkeit von Konstruktion und Methoden her. Visualisierung zu didaktischen Zwecken, sowie die Illustration von Fachveröffentlichungen kommen als weitere Anwendungsmöglichkeiten hinzu.

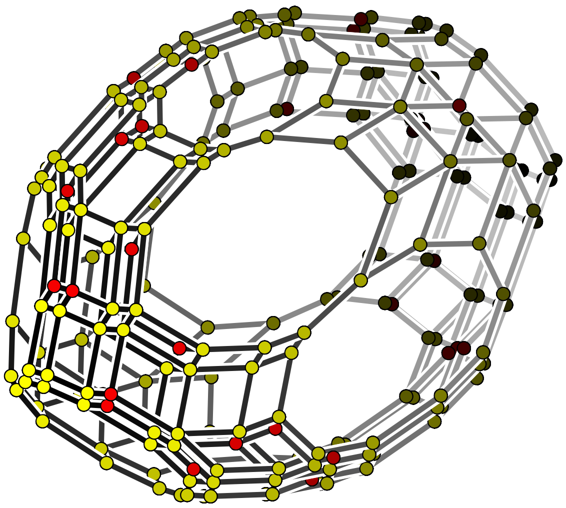

Abb. 2. Flipgraph der Triangulierungen des 8-dimensionalen zyklischen Polytops mit 12 Ecken in der Darstellung auf der trigonometrischen Momentenkurve [5]. Die konvexe Hülle der Punkte bilden das Sekundärpolytop, dessen Ecken (gelb) den regulären Triangulierungen entsprechen.

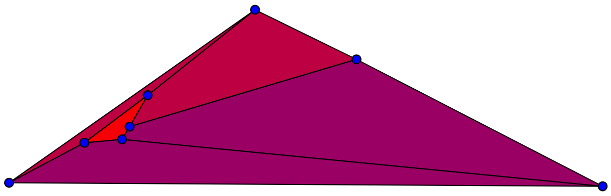

Abb. 3. Ein 3-dimensionaler kombinatorischer Würfel, dessen disjunkte Facetten paarweise aufeinander senkrecht stehen [8].

Im folgenden wollen wir an Hand von einzelnen Modellen eine konkretere Vorstellung vom Modellarchiv geben. Historisch gesehen stehen differentialgeometrische Gebilde, vor allem Kurven und Flächen, klar am Anfang. Als Beispiel mag hier die Minimalfläche von Costa-Hoffman-Meeks [3] dienen: wo erhält man ein diskretes Modell dieser Fläche, um damit eigene Experimente durchzuführen, z. B. um den Index numerisch zu berechnen? Wo kann man danach die berechneten Eigenfunktionen wie in Abbildung 1 veröffentlichen, damit unabhängige Dritte die Experimente überprüfen können? Oder eine Konstruktion aus der Konvexgeometrie: Wie sieht denn ein 3-dimensionaler kombinatorischer Würfel aus, dessen gegenüberliegende Facetten paarweise aufeinander senkrecht stehen? Die Antwort findet sich auf dem EG-Model-Server, vgl. Abbildung 3. Falls man sich mit Triangulierungen von Polytopen beschäftigt, dann ist das zugehörige Sekundärpolytop interessant. Es bedarf allerdings eines beträchtlichen Aufwands, um ein konkretes Sekundärpolytop zu berechnen; prominente Beispiele wie das in Abbildung 2 könnten für ein tieferes Verständnis hilfreich sein. Eine weitere Klasse von geometrischen Objekten, die sich auf dem Server finden, sind Knoten. Es ist seit langem bekannt, dass jeder Knoten im 3-dimensionalen Raum eine Buchdarstellung auf drei Seiten hat. Verglichen mit anderen kombinatorischen Methoden, Knoten zu codieren, lässt sich aus der Buchdarstellung auf elementargeometrischen Weg eine Einbettung des Knotens in den Raum konstruieren, vgl. Abbildung 4.

All dies kann nur dann von dauerhaftem Nutzen sein, wenn gewisse Rahmenbedingungen geschaffen sind. Der zentrale Punkt ist sicherlich die Qualitätssicherung. Hier orientieren wir uns an herkömmlichen mathematischen Fachzeitschriften. Vor der Publikation werden die von den Autoren eingereichten Modelle fachlich referiert; ein international besetztes Editorial Board entscheidet über die Veröffentlichung. Nach der Veröffentlichung werden diese Modelle im Zentralblatt für Mathematik referiert. Jedes Modell wird mit einer vollständigen Beschreibung veröffentlicht und erhält zum Zweck der Zitierbarkeit eine eindeutige Referenznummer. Ein weiterer wesentlicher und zugleich schwieriger Punkt ist die Zukunftssicherheit der Modelle. Die Daten, die ein Modell im EG-Models-Archiv beschreiben, liegen in einer validierbaren Form vor, die automatisch überprüfbar und in andere Formate konvertierbar ist. Die Autoren können allerdings ihre Daten nicht in beliebigem Format einreichen. Zum einen wäre dadurch bereits die Validierung vor der Veröffentlichung erschwert oder sogar ausgeschlossen. Noch schwerer wiegt aber, dass man für die Modelle zukünftige Konversionen in andere Datenformate berücksichtigen muss. Vermutlich keines der heute üblichen Datenformate wird am Ende des 21. Jahrhunderts noch benutzt werden. Daher wird man auf maschinelle Umsetzung angewiesen sein, die ihrerseits nur mit standardisierten Daten zu realisieren sein wird.

Die technische Verwaltung des Servers geschieht mit modernen Techniken und Werkzeugen auf der Basis normierter Sprachen. Die Beschreibungen zu den Modellen werden im XML-Format abgelegt. Der Prozess der Einreichung eines Modells sowie seiner Begutachtung erfolgt vollständig über das Internet. Die jeweils ausgestellten HTML-Seiten werden automatisch erzeugt; dies macht beispielsweise die Umstellung auf ein anderes Layout unproblematisch. Das XML-Format für die Modellbeschreibungen ist durch eine DTD syntaktisch festgelegt und kann somit maschinell validiert werden. Die generierten HTML-Dateien enthalten Metadaten nach dem Dublin Core Standard; daher kann der Datenbestand des EG-Model-Servers mittels qualifizierter Suche via Euler (`http://www.emis.de/projects/EULER/`) oder MathNet (`http://www.mathnet.de`) durchsucht werden. Wenn es sinnvoll erscheint, gibt es die Möglichkeit, eine Darstellung des Modells über das Java-Applet JavaView [6] interaktiv zu visualisieren. Auf die Modelle selbst kann aber auch ohne Java-Unterstützung zugegriffen werden. Viele der neuartigen Tools wurden von den Autoren für die Verwaltung des Servers selbst entwickelt.

Was den Aspekt der Mobilität des Servers und der darin publizierten Modelle angeht, so kann der Server, inklusiv aller Interaktionsmöglichkeiten, auf einfache Weise auf andere elektronische Medien übertragen werden. Insbesondere werden in regelmäßigen Abständen Ausschnitte des Servers auf CD-ROM veröffentlicht werden, die eine identische Funktionalität wie im Internet haben.

Ab November 2000 ist der Server öffentlich und läuft unter realen Bedingungen.

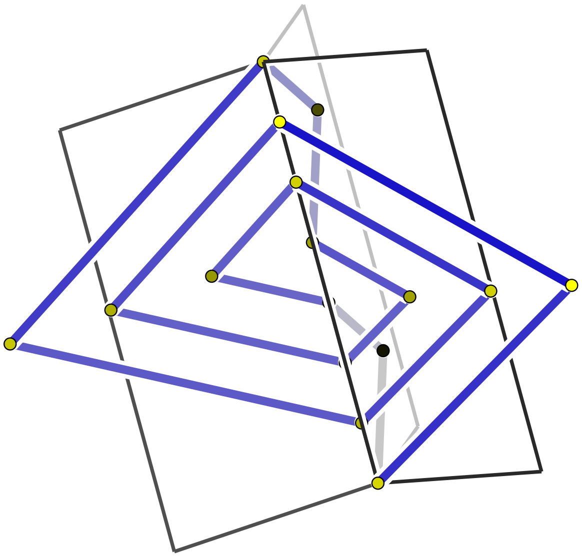

Abb. 4. Kleeblattschlinge in Buchdarstellung mit drei Seiten [1].

Literatur

[1] Ivan Dynnikov: *Trefoil Knot*, Electronic Geometry Models, No. 2000.09.027, TrefoilLeft_Master.jvx.

[2] Gerd Fischer: *Mathematische Modelle*, Vieweg, Braunschweig 1986.

[3] Jim Hoffman: *Costa-Hoffman-Meeks Genus 1 Minimal Surface*, Electronic Geometry Models, No. 2000.07.004, costa1_1.0.obj.

[4] Hermann Karcher und Ulrich Pinkall: *Die Boysche Fläche in Oberwolfach*, Mitteilungen der DMV, Heft 1/97, 45–47.

[5] Julian Pfeifle: *Secondary polytope of a cyclic 8-polytope* $C_8(12)$, Electronic Geometry Models, No. 2000.09.032, car_cyclic_8_12.sec.poly.

[6] Konrad Polthier, Samy Khadem, Eike Preuss, Ulrich Reitebuch: *Javaview 2.0*, `www.javaview.de`.

[7] Eva-Maria Strobel: *Die Modelle der Universität Regensburg – Jürgen Neukirch als Handwerker*, Mitteilungen der DMV, Heft 4/1997, 8–14.

[8] Günter M. Ziegler: *Sharir's Cube*, Electronic Geometry Models, No. 2000.09.028, SharirCube.poly.

Anschrift der Autoren
Dr. Michael Joswig
FB Mathematik, MA 7-1
Technische Universität Berlin
10623 Berlin
`joswig@math.tu-berlin.de`

Dr. Konrad Polthier
FB 3 Mathematik, MA 8-3
Technische Universität Berlin
10623 Berlin
`polthier@math.tu-berlin.de`