

<http://www.math.tu-berlin.de/Schnellkurs/>

Schnellkurs Ingenieurmathematik Ein Pilotprojekt an der TU Berlin

von Frank H. Lutz und Brigitte Lutz-Westphal

Im ersten Semester bereits die ganze Grundlagenmathematik für Ingenieure lernen? Dabei selbständig und effizient arbeiten und dazu noch mit Spaß und Engagement bei der Sache? Das kann – unter besonderen Bedingungen – gelingen. Wir berichten vom Pilotprojekt Schnellkurs Ingenieurmathematik.

Jeweils zum Wintersemester beginnen an der TU Berlin mehr als 2000 Erstsemester ein ingenieurwissenschaftliches Studium mit Nebenfach Mathematik. Die angehenden Ingenieurinnen und Ingenieure besuchen in der Regel die Vorlesungen Analysis I + II und Lineare Algebra für Ingenieure. In diesen Großveranstaltungen orientiert sich die Stoffvermittlung an einem mittleren Leistungsniveau. Für Studierende mit Schwierigkeiten in Mathematik werden im Rahmen eines „Fachmentorenprogramms“ neben dem regulären Übungsbetrieb zusätzliche Tutorien zum Wiederholen des Stoffs angeboten. Ein spezielles Angebot für begabte und stärker an der Mathematik interessierte Studentinnen und Studenten war bisher nicht vorgesehen. Sie fühlen sich in den Vorlesungen und Tutorien häufig unterfordert und bleiben deshalb den Veranstaltungen fern. Ergebnis ist, dass ihre Prüfungsleistungen oft nicht ihren Möglichkeiten entsprechen.

Die Idee

Zur Verbesserung dieser unbefriedigenden Situation wurde auf Initiative von Prof. Dr. Günter Bärwolff und Prof. Dr. Dirk Ferus unter Leitung des ersten Autors und unter didaktischer Begleitung der zweiten Autorin im vergangenen Wintersemester an der TU Berlin ein neues Vorlesungskonzept entwickelt und erprobt¹, das es guten Studentinnen und Studenten ermöglicht, die Inhalte der Vorlesungen Analysis I+II und Lineare Algebra für Ingenieure integriert in einer einsemestrigen Ver-

anstaltung zu erlernen: *Der Schnellkurs Ingenieurmathematik.*

Der neue Kurs schafft durch ein direktes Anknüpfen an vorher abgeprüfte Vorkenntnisse und ein schnelleres Lerntempo Anreize für eine höhere Leistungsbereitschaft. Der Stoff wurde neu organisiert, um neben der Vermittlung der gleichen Inhalte noch weitere Ziele zu erreichen.

Gesicherte Grundkenntnisse und engagierte Studierende

Im Vorhinein wurde beschlossen, die Anzahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Schnellkurs auf maximal 30 zu beschränken. Eine Woche vor Semesterbeginn fand eine freiwillige Aufnahme Klausur statt. Von 105 Angemeldeten nahmen 65 Studierende (11 Studentinnen und 54 Studenten) an der Klausur teil, von denen 30 (5 Studentinnen und 25 Studenten) so gut abschnitten, dass sie zum Schnellkurs zugelassen wurden.

Die Themen der Klausur waren: Brüche, Wurzeln, Beträge, Ungleichungen, Mengen, Funktionsgraphen, Ableitungen, Extremwerte und einfache Integrale. Gerade der Umgang mit Brüchen, Beträgen und Ungleichungen fällt vielen Studierenden in den Standardkursen schwer und verhindert, dass selbst einfache Umformungen nachvollzogen werden können. Daher war uns die Überprüfung dieser – nicht über das Grundkurs-Abiturwissen hinausgehenden – Kenntnisse vor Kursbeginn wichtig.

¹ Herzlichen Dank an Dr. Friederike Körner und Vladimir Magalashvili für die Betreuung der Übungsgruppen und für viele anregende Impulse und Rückmeldungen!

Unter den 30 Teilnehmerinnen und Teilnehmern war die Bereitschaft zum selbständigen und intensiven Arbeiten von Anfang an ausgesprochen hoch und wurde durch das Konzept des Kurses weiter gefördert.

Gute Rahmenbedingungen

Der Kurs umfasst wöchentlich 4 Stunden Vorlesung, 2 Stunden Tutorium (zu je 15 Studierenden) und 30 Minuten Kleingruppenarbeit (zu je 3–4 Studierenden). Dies klingt in Zeiten übervoller Tutorien mit beinahe 40 Studierenden nach paradiesischen Verhältnissen. Es ist aber tatsächlich so, dass der Schnellkurs im Übungsbetrieb nicht personalintensiver als die Standardkurse ist, denn jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer hätten zusätzlich zu den drei Standardvorlesungen an drei Tutorien teilnehmen müssen. Das heißt, ein Tutorium mit 15 Studierenden im Schnellkurs entspricht einem „Normaltutorium“ von 45 Studierenden.

Durch Umwidmung der obligatorischen Sprechstunden der Übungsgruppenleiter wurde außerdem Zeit für das Angebot der 30-minütigen Kleingruppenarbeit gewonnen. Die Konzeption der Kleingruppen geht auf Dr. Helmut Fischer zurück, der dieses Übungselement über viele Jahre in seinem Kurs „Mathematik für Physiker“ an der Universität Tübingen eingesetzt hat. Bei den Kleingruppentreffen mit ihrer Tutorin oder ihrem Tutor haben die Studierenden die Möglichkeit, ausführlich ihre Fragen zu diskutieren und sich gegenseitig selbst erarbeitete Lösungen von Übungsaufgaben zu präsentieren.

Didaktisches Konzept

Ziele: Mathematik und mehr

Das Hauptziel des Schnellkurses ist, den gleichen Stoff zu vermitteln wie in den Standardkursen Analysis I+II und Lineare Algebra für Ingenieure. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird das Semester in drei Teile geteilt. Nach jeweils einem Drittel der Zeit schreiben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Schnellkurses eine gleiche bzw. niveaugleiche Klausur wie ihre Kommilitonen und Kommilitoninnen in den Vorlesungen Analysis I, Lineare Algebra und Analysis II.

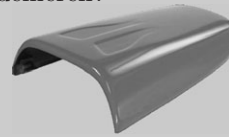
Darüberhinaus sollen durch den Schnellkurs Kompetenzen wie das schnelle Aneignen von Fachwissen und die Präsentation von mathematischen Inhalten gefördert werden. Eine problemorientierte Aufbereitung des Stoffes bietet die Chance, von Anfang bis Ende selber mitzudenken und so nicht nur rezeptiv, sondern aktiv mitarbeitend und fragenstellend an der Vorlesung teilzunehmen. Die besondere Konzeption

der Übungsblätter gibt Anregungen zur selbständigen und eigenverantwortlichen Auseinandersetzung mit den Inhalten.

Zeitersparnis und Qualitätsgewinn durch Problemorientierung

Von entscheidender Bedeutung für den Schnellkurs ist eine problemorientierte Herangehensweise. Eine Modellierungsaufgabe eröffnet den Kurs:

- Wie lässt sich ein Motorrad-Sitzkeil modellieren?



- Wie sieht die Profilkurve aus?
- Wie viel Material wird benötigt?

Anhand dieser Fragestellung lassen sich die grundlegenden Ideen für Analysis I und II in einer Vorlesungsstunde entwickeln: Die Profilkurve setzt sich stückweise aus Funktionen, z. B. aus Polynomen, zusammen. Damit es keine Knicke gibt (die das Auge leicht erkennt) müssen die Stücke differenzierbar (und auf jeden Fall stetig) zusammenpassen. Die Fläche lässt sich am Besten durch kleine Rechtecke oder Streifen approximieren. Dadurch wird es offensichtlich, dass Grenzwerte gebildet werden müssen, also einer näheren Betrachtung bedürfen. Fragen zur Integration oder zur Parametrisierung der Fläche schließen sich an.

Natürlich erlernen die Studierenden den Stoff nicht in dieser ersten Vorlesung, aber es wird deutlich, dass bestimmte Begriffe und Konzepte benötigt werden. Im Gegensatz dazu ist im klassischen Vorlesungsbetrieb ein axiomatischer Aufbau der Grundvorlesungen lange tradiert und erscheint fast selber wie ein Axiom. Eine Fülle von neuen Begriffen und Konzepten wie Definitions- und Wertebereich, Injektivität, Surjektivität, Grenzübergang usw. steht dabei am Anfang. Diese vielen fremden Objekte können zu diesem Zeitpunkt von den Studierenden nicht in passende Wissenskontexte eingeordnet werden und werden daher auch nur unter größter (Pauk-)Anstrengung behalten.

Eine Problemorientierung hingegen ermöglicht einen erleichterten Einstieg. Die Ausgangsfrage ist leicht fasslich und es leuchtet ein, dass reines Probieren auf Basis des Schulwissens nicht ausreicht. Es stellt sich zu keinem Zeitpunkt die Frage: *Wofür brauchen wir das?* Der neue Stoff wird in sinnerfüllte außer- und innermathematische Kontexte eingebettet. Darüberhinaus lernen die Studierenden von Beginn an ein

zielorientiertes Herangehen an die Inhalte: Was ist das Problem? Welche Lösungsansätze gibt es? Welche Grundlagen werden benötigt? Welche Fehler können passieren?

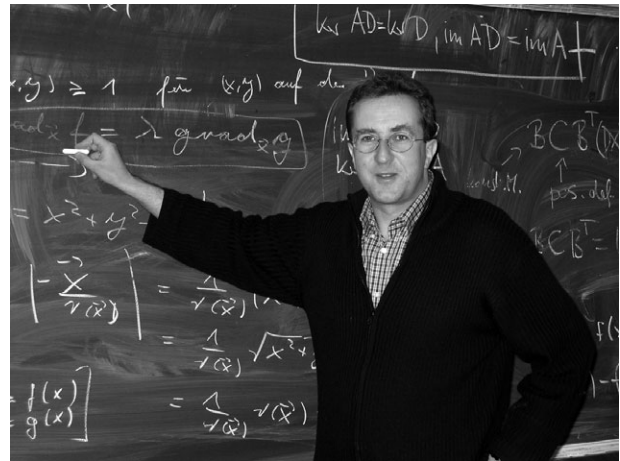
Die Problemorientierung zieht sich durch die ganze Vorlesung hindurch. Nicht immer gibt es so offensichtlich nützliche und weitreichende Problemstellungen, aber auch im Kleinen bewährt sich diese Herangehensweise. Die Inhalte werden gewissermaßen vom Kopf auf die Füße gestellt. In der mathematischen Forschung stehen Definitionen auch nur selten am Beginn, sondern ein Problem, das gelöst sein will. Auf dem Lösungsweg entstehen Lemmata und Sätze und eben auch Definitionen, darum, weil man sie benötigt und sie erst dann ihren Sinn entfalten und verständlich werden.

Die Themenblätter

Statt, wie in den Standardkursen üblich, jede Woche ein Übungsblatt mit vier Aufgaben auszugeben, wurden für den Schnellkurs Themenblätter zusammengestellt, auf denen *alle* Aufgaben abgedruckt waren, die in den vergangenen Semestern zu den entsprechenden Themen gestellt wurden. So gab es beispielsweise 53 zu berechnende Integrale statt nur 4. Von den auf den Themenblättern in der Regel mehr als 120 möglichen Punkten mussten Aufgaben im Gegenwert von 20 Punkten schriftlich bearbeitet werden. Die Aufgaben konnten frei aus dem Aufgabenangebot des jeweiligen Themenblattes ausgewählt werden. Darüberhinaus haben die Studierenden das vergrößerte Angebot genutzt, um gemeinsam Aufgaben auch einfach so zur Übung und nicht nur zum reinen „Punktescheffeln“ zu lösen. Musterlösungen wurden übrigens keine ausgegeben.

Durch den Überblick über viele Aufgaben lassen sich leicht Muster und Ähnlichkeiten erkennen. Schafft man es, einen bestimmten Aufgabentyp zu lösen, sind weitere Aufgaben ein Leichtes. Dadurch entsteht Sicherheit im Umgang mit den Anforderungen. Zur Diskussion der schwierigen Aufgaben bieten die Kleingruppen eine ideale Plattform.

Die Themenblätter bringen weitere Vorteile für die Lehre: Beispielsweise werden die Tutorien von unnötigem Zeitdruck entlastet. Bei vier Übungsaufgaben pro Woche fühlen sich viele Tutorinnen und Tutoren genötigt, alle Aufgaben im Tutorium selber an der Tafel vorzurechnen, um korrekte Lösungen zu liefern. Dies benötigt meist die gesamte Tutoriumszeit und eine aktive Mitarbeit der Studierenden kommt dadurch zu kurz. Gibt es mehr Aufgaben als im Tutorium behandelt werden können, so bleibt ein größerer Gestaltungsspielraum offen, was sich sichtlich vorteilhaft auf die Lehre auswirkt.



Der Autor an der Schnellkurs Tafel (Foto: Privat)

Keine klassische Abfolge

„Vorlesung \rightarrow Tutorium \rightarrow Übungsblatt“

Auf die klassische Abfolge, den Stoff in der Vorlesung vorzustellen, dann erste Aufgaben in den Tutorien durchzusprechen, um im dritten Schritt die Studierenden die Übungsblätter bearbeiten zu lassen, wird im Schnellkurs bewusst verzichtet. Durch die Zusammenfassung des Stoffs zu Themenblättern muss nicht zwingend im Wochenrhythmus ein neues Blatt ausgeteilt werden, sondern dann, wenn neue Themenkomplexe anstehen. Daher kann es vorkommen, dass es gelegentlich zwei Blätter pro Woche gibt oder zwei Wochen lang kein Blatt. Immer wieder sind auch Aufgaben zu lösen, für die die erforderlichen Grundlagen erst später in der Vorlesung thematisiert werden. Dies erfordert ein hohes Engagement der Studierenden, zahlt sich aber insofern aus, als die Studierenden in der Vorlesung immer wieder auf bereits selbst Erarbeitetes zurückgreifen können. Sie knüpfen also an Vorerfahrungen mit der Thematik an. Elementares kann dann in aller Kürze behandelt werden und es bleibt mehr Zeit für die eigentlichen „Knackpunkte“.

Klausurergebnisse und Fragebogenantworten

Im Wintersemester 2004/2005 wurden die Schnellkurs-Klausuren zur Analysis I im Dezember und zur Linearen Algebra im Januar von allen 30 Studierenden mit einem Gesamtnotendurchschnitt von 1,9 (10 mal „sehr gut“) bzw. 1,7 (12 mal „sehr gut“) bestanden. Die Klausur zur Analysis II im Februar bestanden 25 Studierende bei einem Schnitt von 3,2 (2 mal „sehr gut“). Unser Eindruck im Vergleich mit den Ergebnissen der Standardkurse in den vorherigen Semestern ist, dass die Gruppe mit besseren Noten abgeschlossen hat, als sie in den Standardkursen erzielt hätte.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Mathematik
http://www.math.tu-berlin.de/Schnellkurs
Dr. Frank Lutz / Dr. Brigitte Lutz

SS 2005

Schnellkurs Ingenieurmathematik
Themenblatt 1: Integration

Integralberechnung: $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$

Eingabe: Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ „gutartig“ sein soll, z.B. D ist ein Intervall oder die Vereinigung von endlich vielen Intervallen).

Ausgabe: $\int_a^b f(x) dx$

Eigenschaften des Integrals:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{(Linearität)}$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{(Monotonie)}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{(Abschätzung des Integrals)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{für } a \leq c \leq b$$

Verfahren zur Berechnung eines Integrals:

- Stammfunktionskenntnis/rates (= Hauptstapel der Differential und Integralrechnung)
- partielle Integration (= Produktregel der Differentiation)
- Substitution (= Kettenregel der Differentiation)
- Partiellbruchzerlegung (für rationale Funktionen)
- Numerische Verfahren

Achtung:

- Nicht jede Funktion f ist integrierbar!
Z.B. ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ nicht Riemann-integrierbar (jedoch Lebesgue-integrierbar).

15. Aufgabe
Zeigen Sie in Partialexakte und bestimmen Sie eine

(12 Punkte)

Zum Glück:

- Stetigkeitsstetige Funktionen sind immer integrierbar (das sind die Funktionen, die in der Praxis auftreten).

Achtung:

- Nicht jedes Integral lässt sich in geschlossener Form integrieren!
Z.B. nicht $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\cos x} dx$, ...

Aufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben seien die Punkte $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots, p_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Sei P das Polygon, das von den Strecken $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_2 p_3}, \dots, \overline{p_{n-1} p_n}$ und $\overline{p_n p_1}$ begrenzt wird. Dann ist die Fläche von P gegeben durch

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad \text{(Gaußsche Flächenformel)}$$

wobei wir zusätzlich $p_0 = p_n$ und $p_{n+1} = p_1$ setzen.
Skizzieren Sie das Polygon mit den Ecken (in der angegebenen Reihenfolge)

$p_1 = (0, 1), p_2 = (3, 3), p_3 = (2, 0), p_4 = (3, -4), p_5 = (0, -2),$
 $p_6 = (-3, -5), p_7 = (-2, -1), p_8 = (-6, -4), p_9 = (-2, 6).$

und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\pi} x \cos 4x^2 dx$ b) $\int_0^1 e^x \cos x dx$

3. Aufgabe (8 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

i) $\int_0^1 (t + 3t^2 + 1) dt$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(2t) + \cos(2t)} dt$

iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ iv) $\int_0^1 x \tan^2 x dx$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Ein Obisk hat die Form eines liegenden Zylinders. Der Tank ist 2m hoch und 3m lang.
a) Wieviel Öl lässt der Tank?
b) Wieviel Öl ist im Tank, wenn er noch bis zur Höhe von 1,50 m gefüllt ist?

5. Aufgabe (18 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ ii) $\int_1^e x^2 e^{-x} dx$ iii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

iv) $\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$ v) $\int_0^1 \tan^2 x dx$ vi) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

6. Aufgabe (3 Punkte)
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Cosinusfunktion und der x-Achse auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

7. Aufgabe (12 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale!

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \ln y dy$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

iii) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ iv) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

8. Aufgabe (3 Punkte)
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und den Kurven $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{1-x}$ eingeschlossen wird!

9. Aufgabe (4 Punkte)
Was ist an den folgenden „Berechnungen“ falsch?

a) $\int_0^1 \sin t dt = -\cos t \Big|_0^1 = -\cos 1 - (-\cos 0) = -\cos 1 + 1 = 1 - \cos 1$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 1 - 0 = 1$

Nach Beendigung des Kurses im Wintersemester wurden die Studierenden per Fragebogen befragt. Besonders erfreulich waren die Antworten auf die Frage: *Was nehmen Sie aus dem Schnellkurs an Fähigkeiten mit, die Ihnen für Ihr weiteres Studium/für Ihren Beruf nützlich sein können?*

Die folgenden Auszüge aus den Antworten zeigen, dass neben der Vermittlung von Inhalten auch andere Ziele des Kurses erreicht wurden: „selbstständiges Erarbeiten von Stoff (Grundlage eines Studiums)“ – „Disziplin“ – „Zielstrebigkeit“ – „alles ist möglich, wenn man nur will!“ – „fokussierte, konzentrierte und schnelle Lernfähigkeit“ – „Vorkenntnisse für spätere Fächer“ – „großes Arbeitspensum bewältigen“ – „Fähigkeit, effizient zu studieren“ – „Konzentrationsfähigkeit und Fähigkeit, sich Dinge selbst zu erarbeiten“ – „effektives Arbeiten“ – „mathematische Fähigkeiten schnelles Lernen“ – „Teamarbeit“.

Ausblick

Nach einer positiven Evaluation im Februar 2005 hat das Institut für Mathematik beschlossen, den Schnellkurs als neues Element der Ingenieurausbildung regelmäßig im Wintersemester anzubieten.

Adresse der Autoren

Dr. Frank Lutz
Brigitte Lutz-Westphal
Institut für Mathematik, MA 6-2
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
lutz@math.tu-berlin.de
westphal@math.tu-berlin.de

Frank Lutz hat in Tübingen und London Mathematik und Physik studiert, an der TU Berlin bei Günter Ziegler promoviert und ist Assistent bei Martin Grötschel. Er habilitiert sich gerade im Gebiet Computational Topology und ist Mitglied der Forschergruppe „Polyhedral Surfaces“ an der TU Berlin.

Brigitte Lutz-Westphal studierte Musik und Mathematik in Berlin und Paris, war in Tübingen Referendarin und ist derzeit als Doktorandin mit dem Projekt „Diskrete Mathematik für die Schule“ (Prof. Grötschel) an der TU Berlin. Gemeinsam engagieren sie sich für die Verbesserung von Lehre und Unterricht und erleben, wie mathematische und didaktische Sichtweisen gegenseitig voneinander profitieren können.

