Seminar Numerische Lineare Algebra
Localization in functions of matrices
Wintersemester 2018/2019
Prof. Dr. Jörg Liesen

(Stand 17.09.2018)

Erster Termin: Dienstag, 16.10.2018, 12:00-14:00, MA 376
Wünschenswerte Voraussetzungen (dringend empfohlen): Lineare Algebra I+II, Analysis I+II, Numerische Lineare Algebra I+II

Viele Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften führen auf Probleme der linearen Algebra, zum Beispiel lineare Gleichungssysteme, lineare Ausgleichsprobleme oder Eigenwertprobleme, mit *dünnbesetzten* oder *sparsen* Matrizen. Diese Matrizen sind durch das Auftreten von sehr vielen oder besonders günstig verteilten Null-Einträgen gekennzeichnet, was bei der numerischen Lösung der jeweiligen Probleme effizient ausgenutzt werden. Enthält eine Matrix nicht viele Null-Einträge oder können ihre vorhandenen Null-Einträge nicht effizient ausgenutzt werden, so nennt man sie *dichtbesetzt* oder *dense*. Diese Begriffe wurden von J. H. Wilkinson bereits in den späten 1960er Jahren geprägt[1]. Zahlreiche theoretische Resultate und Algorithmen für sparse Matrizen wurden seitdem entwickelt.

Vergleichsweise weniger bekannt sind die Theorie und Numerik von Matrizen mit *lokalisierten Einträgen*. Bei einer solchen Matrix können alle Einträge ungleich Null sein, aber die *signifikanten* Nicht-Null-Einträge treten nur in einem bestimmen Bereich der Matrix auf. Ein häufig beobachtetes Beispiel ist das Abfallen von Einträgen mit ihrer Entfernung von der Diagonalen, der sogenannte *off-diagonal decay*. Formal hat eine Matrix $A = [a_{ij}]$ diese Eigenschaft, wenn es eine reelle, nicht-negative Funktion φ für $x \geq 0$ mit $\varphi(x) \to 0$ für $x \to \infty$ und eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass

$$|a_{ij}| \leq K\varphi(|i-j|) \quad \text{für alle } i, j \text{ gilt.}$$

Von Interesse sind hierbei natürlich nur Schranken mit "kleinem" K und einer "schnell abfallenden" Funktion φ. Ist zum Beispiel $\varphi(x) = e^{-\alpha x}$ und $\alpha > 0$, so fallen die Einträge von A exponentiell mit der Entfernung von der Diagonalen ab. Einen aktuellen Überblick über das Gebiet gibt der umfangreiche Artikel von Benzi [1]. Im zweiten Kapitel findet sich auch eine kompakte Zusammenstellung des mathematischen Hintergrundes.

In diesem Seminar sollen Ergebnisse über die Lokalisierung von Matrix-Einträgen aus einer Reihe von Fachartikeln von den Teilnehmenden präsentiert werden. Hierbei liegt der Fokus auf der Lokalisierung von Einträgen der Inversen A^{-1} (z.B. [5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]), der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(A)$ (z.B. [10, 11]) und allgemeinen Matrix-Funktionen $f(A)$ (z.B. [2, 3, 4]).

Am ersten Termin des Seminars werden nach einer kurzen Einführung in das Gebiet die Themen bzw. Artikel verteilt. Alle Teilnehmenden halten einen Vortrag und schreiben einen Bericht über das Seminar. Weitere Details werden am ersten Termin bekanntgegeben.

[1] In dem von ihm und C. Reinsch herausgegebenen Handbook for Automatic Computation, Vol. II: Linear Algebra, Springer-Verlag, 1971, schrieb er: "The matrix may be *sparse*, either with the non-zero elements concentrated on a narrow band centered on the diagonal or alternatively they may be distributed in a less systematic manner. We shall refer to a matrix as *dense* if the percentage of zero elements or its distribution is such as to make it uneconomic to take advantage of their presence."

Literatur

[1] M. Benzi, *Localization in matrix computations: theory and applications*, in Exploiting hidden structure in matrix computations: algorithms and applications, vol. 2173 of Lecture Notes in Math., Springer, Cham, 2016, pp. 211–317.

[2] M. Benzi and G. H. Golub, *Bounds for the entries of matrix functions with applications to preconditioning*, BIT, 39 (1999), pp. 417–438.

[3] M. Benzi and N. Razouk, *Decay bounds and $O(n)$ algorithms for approximating functions of sparse matrices*, Electron. Trans. Numer. Anal., 28 (2007/08), pp. 16–39.

[4] M. Benzi and V. Simoncini, *Decay bounds for functions of Hermitian matrices with banded or Kronecker structure*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 36 (2015), pp. 1263–1282.

[5] C. Canuto, V. Simoncini, and M. Verani, *On the decay of the inverse of matrices that are sum of Kronecker products*, Linear Algebra Appl., 452 (2014), pp. 21–39.

[6] S. Demko, *Inverses of band matrices and local convergence of spline projections*, SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), pp. 616–619.

[7] S. Demko, W. F. Moss, and P. W. Smith, *Decay rates for inverses of band matrices*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 491–499.

[8] C. Echeverría, J. Liesen, and R. Nabben, *Block diagonal dominance of matrices revisited: bounds for the norms of inverses and eigenvalue inclusion sets*, Linear Algebra Appl., 553 (2018), pp. 365–383.

[9] R. Freund, *On polynomial approximations to $f_a(z)(z-a)^{-1}$ with complex a and some applications to certain non-Hermitian matrices*, Approx. Theory Appl., 5 (1989), pp. 15–31.

[10] M. Hochbruck and C. Lubich, *On Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 1911–1925.

[11] A. Iserles, *How large is the exponential of a banded matrix?*, New Zealand J. Math., 29 (2000), pp. 177–192. Dedicated to John Butcher.

[12] R. Nabben, *Decay rates of the inverse of nonsymmetric tridiagonal and band matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 20 (1999), pp. 820–837.

[13] ——, *Two-sided bounds on the inverses of diagonally dominant tridiagonal matrices*, Linear Algebra Appl., 287 (1999), pp. 289–305. Special issue celebrating the 60th birthday of Ludwig Elsner.