Vorlesung Variationsrechnung und optimale Steuerung

6. Foliensatz, Version vom 9.7.2014

Michael Karow

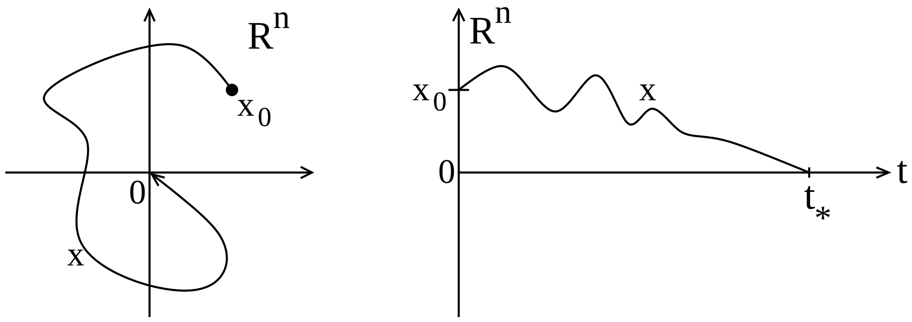
Thema der nächsten Vorlesungen:

Zeitoptimale 0-Steuerung für lineare zeitinvariante DGL bei beschränkter Steuerung.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und
$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und konvex, 0 innerer Punkt von Ω (**Steuerbereich**).

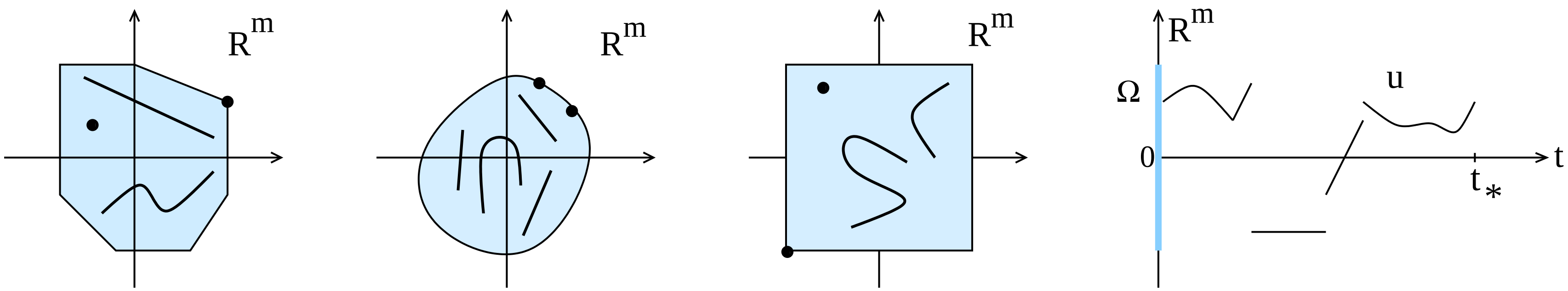
Aufgabe: Bestimme $u \in \mathcal{PC}([0,t_*],\mathbb{R}^m) \subset L^\infty([0,t_*],\mathbb{R}^m)$ so dass

1) $u(t) \in \Omega$ für alle $t \in [0,t_*]$,
2) $x(t_*) = 0$,
3) t_* **minimal,**



wobei

4) $x(0) = x_0$,
5) $t \mapsto x(t)$ stetig,
6) $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ an allen Stellen t, an denen u stetig ist.



Kompakte konvexe **Steuerbereiche** Ω und unstetige Steuerungen.

Definitionen

Im Folgenden ist der **Steuerbereich** $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ stets **konvex**, **kompakt** und Abschluss einer nicht leeren offenen Menge welche 0 enthält.
Wichtigstes Beispiel ist der Einheitswürfel

$$\Omega = \{\, u \in \mathbb{R}^m \mid |u^i| \leq 1,\ i = 1, \ldots, m \,\}.$$

Die zulässigen Steuerungen sind aus

$$L^\infty([0,t],\Omega) = \{u : [0,t] \to \Omega \mid u \text{ messbar}\}.$$

Die zugrunde liegende Norm ist

$$\|u\|_\infty = \inf\{c \geq 0 \mid \|u(s)\|_2 \leq c \text{ für fast alle } s \in [0,t]\,\}$$

$E_\Omega(x_0,t)$ bezeichnet die vom Zustand x_0 aus mit Steuerungen in Ω zum Zeitpunkt t erreichbaren Zustände (**Erreichbarkeitsmenge**):

$$E_\Omega(x_0,t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds, \quad u \in L^\infty([0,t],\Omega) \right\}$$

Bemerkung:
Der Raum $L^\infty([0,t],\Omega)$ wird eingeführt, damit $E_\Omega(x_0,t)$ abgeschlossen ist.
In der Praxis werden nur Steuerungen aus $\mathcal{PC}([0,t],\Omega)$ gebraucht.

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen I

Erreichbarkeitsmenge:

$$E_\Omega(x_0,t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds, \quad u \in L^\infty([0,t],\Omega) \right\}$$

Insbesondere ist

$$E_\Omega(0,t) = \left\{ \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds \;\middle|\; u \in L^\infty([0,t],\Omega) \right\}$$

Hieraus folgt sofort:

Fakt 1: $E_\Omega(x_0,t) = e^{At}x_0 + E_\Omega(0,t) \subseteq e^{At}x_0 + \mathcal{C}(A,B)$,

wobei $\mathcal{C}(A,B) = \text{range}\,[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots A^{n-1}B]$.

Fakt 2: 0 ist relativ innerer Punkt von $E_\Omega(0,t)$ (bzgl. $\mathcal{C}(A,B)$).

Beweisidee: Sei $\xi \in \mathcal{C}(A,B)$. Wir wissen bereits, dass

$$\xi = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_\xi(s)\,ds, \qquad \text{wobei} \quad u_\xi(s) := B^\top e^{A^\top(t-s)}z, \;\; \Gamma(t)z = \xi.$$

Zu zeigen ist: wenn $\|\xi\|_2$ hinreichend klein, dann ist $u_\xi(s) \in \Omega$ für $s \in [0,t]$. Dies folgt aus

$$\|z\|_2 \leq \frac{\|\xi\|_2}{\lambda_{\min}(\Gamma(t))},$$

wobei $\lambda_{\min}$ den kleinsten von 0 verschiedenen Eigenwert bezeichnet. □

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen II

Lemma 1. $E_\Omega(0,t)$ enthalten in einer Kugel um $0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius

$$R_t = \frac{1}{\|A\|}(e^{\|A\|\,t} - 1)\|B\|\,c_\Omega, \qquad \text{wobei} \quad \|A\| = \max_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}, \quad c_\Omega = \max\{\|u\|_2 \mid u \in \Omega\}.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds\right\| &\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}Bu(s)\|\,ds \\
&\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}\|\,\|B\|\,\|u(s)\|_2\,ds \\
&\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\,ds\,\;\|B\|\,c_\Omega = R_t \qquad \square
\end{aligned}$$

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen III

Fakt 3: $E_\Omega(x_0, t)$ ist kompakt.

Beweis: Die Beschränktheit von $E_\Omega(x_0, t)$ folgt aus Lemma 1 und Fakt 1.

Zur Abgeschlossenheit: Sei $x_* \in \partial E_\Omega(x_0, t)$.
Dann gibt es eine Folge x_j und Steuerungen $u_j \in L^\infty([0, t], \Omega)$, so dass

$$x_j = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_j(s)\, ds \qquad \text{und} \qquad \lim_{j\to\infty} x_j = x_*.$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu über schwach-$*$ Kompaktheit (Funktionalalysis) gibt es ein $u_* \in L^\infty([0, t], \Omega)$, so dass

$$x_* = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_*(s)\, ds.$$

Also ist $x_* \in E_\Omega(x_0, t)$, $\square$

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen IV

Erreichbarkeitkeitsmenge:

$$E_\Omega(x_0, t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = e^{At}\, x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds, \quad u \in L^\infty([0,t], \Omega) \right\}$$

Fakt 4: $E_\Omega(x_0, t)$ ist konvex.

Beweis: Sei $x_k = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu_k(s)\, ds$, $k = 1, 2$, $u_k \in L^\infty([0,t], \Omega)$ und $\alpha \in [0, 1]$.
Wegen Konvexität von Ω ist $u = \alpha\, u_1 + (1 - \alpha)\, u_2 \in L^\infty([0,t], \Omega)$ und daher

$$\alpha\, x_1 + (1 - \alpha)\, x_2 = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds \in E_\Omega(x_0, t).$$

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen V

Lemma 2: Sei x die Lösung von $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$. Dann gilt für $t, \tau \geq 0$,

$$x(t+\tau) = e^{A\tau} x(t) + \int_0^{\tau} e^{A(\tau-s)} B\, u(t+s)\, ds.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &= e^{A(t+\tau)}\, x_0 + \int_0^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} Bu(s)\, ds \\ &= e^{A\tau} \left(e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds \right) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} Bu(s)\, ds \\ &= e^{A\tau}\, x(t) + \int_0^{\tau} e^{A(\tau-s)} B\, u(t+s)\, ds. \square \end{aligned}$$

Aus Lemma 2 folgt unmittelbar

Fakt 5: $\quad E_\Omega(x_0, t+\tau) \subseteq e^{A\tau}\, E_\Omega(x_0, t) + E_\Omega(0, \tau).$

Fakt 6: Wenn $0 \in E_\Omega(x_0, t)$, dann $0 \in E_\Omega(x_0, t+\tau)$ für alle $\tau \geq 0$.

Beweis: Setze die Steuerung u, welche nach zur Zeit t nach 0 steuert, durch die 0-Steuerung fort (Steuerung abschalten, sobald 0 erreicht).

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen VI

Lemma 3: Sei x die Lösung von $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$. Dann gilt für $t, \tau \geq 0$,

$$\|x(t+\tau) - x(t)\|_2 \leq (e^{\|A\|\,\tau} - 1)\left(\|x(t)\|_2 + \|B\|\,\frac{\|u\|_\infty}{\|A\|}\right),$$

wobei $\|A\| = \max_{v \neq 0} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2}$.

Beweis: Aus Lemma 2 folgt $x(t+\tau) - x(t) = \underbrace{(e^{A\tau} - I)x(t)}_{a} + \underbrace{\int_0^\tau e^{A(\tau-s)} B\, u(t+s)\, ds}_{b}$.

Mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion folgt $\|e^{A\tau} - I\| \leq e^{\|A\|\tau} - 1$, also $\|a\| \leq (e^{\|A\|\tau} - 1)\|x(t)\|$. Im Beweis von Lemma 1 wurde schon gezeigt, dass $\|b\| \leq (e^{\|A\|\,t} - 1)\|B\|\,\|u\|_\infty / \|A\|$ $\square$

Lemma 3 impliziert

Fakt 7: Die Abbildung $t \mapsto E_\Omega(x_0, t)$ ist stetig bezüglich der Hausdorff-Metrik, genauer

$$d_H(E_\Omega(x_0, t+\tau), E_\Omega(x_0, t)) \leq (e^{\|A\|\,\tau} - 1)\left(\rho_t + \|B\|\,\frac{c_\Omega}{\|A\|}\right),$$

$$\rho_t = \max\{\|x\|_2 \mid x \in E_\Omega(x_0, t)\}, \qquad c_\Omega = \max\{\|u\|_2 \mid u \in \Omega\}.$$

(Zur Definition der Hausdorff-Metrik siehe nächste Seite)

Die Hausdorff-Metrik

Definition. Seien M_1, M_2 nicht leere kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.
Der Hausdorff-Abstand $d_H(M_1, M_2)$ von M_1 und M_2 ist die kleinste Zahl $d \geq 0$, so dass gilt:

(1) zu jedem $x_1 \in M_1$ gibt es ein $x_2 \in M_2$ mit $\|x_1 - x_2\|_2 \leq d$,
und
(2) zu jedem $x_2 \in M_2$ gibt es ein $x_1 \in M_1$ mit $\|x_1 - x_2\|_2 \leq d$.

In der Literatur findet man die gleichwertige Definition:

$$d_H(M_1, M_2) = \max \left\{ \max_{x_1 \in M_1} \min_{x_2 \in M_2} \|x_1 - x_2\|_2, \max_{x_2 \in M_2} \min_{x_1 \in M_1} \|x_1 - x_2\|_2 \right\}.$$

Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen VII

Fakt 8: Der Erreichbarkeitskegel

$$E_\Omega(x_0) := \bigcup_{t\geq 0} [\{t\} \times E_\Omega(x_0, t)] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

ist abgeschlossen. Für den Rand gilt

$$\partial E_\Omega(x_0) = \bigcup_{t\geq 0} [\{t\} \times \partial E_\Omega(x_0, t)].$$

Beweis: Wir zeigen, dass das Komplement von $E_\Omega(x_0)$ offen ist.

Sei $(\hat{t}, \hat{x}) \notin E_\Omega(x_0)$. Dann ist $\hat{x} \notin E_\Omega(x_0, \hat{t})$. Weil $E_\Omega(x_0, \hat{t})$ abgeschlossen ist, gibt es eine Kugel $\mathcal{B}_r(\hat{x})$ um $\hat{x}$ mit Radius $r > 0$, so dass $E_\Omega(x_0, \hat{t}) \cap \mathcal{B}_r(\hat{x}) = \emptyset$. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Erreichbarkeitsmengen von t ist dann auch $E_\Omega(x_0, t) \cap \mathcal{B}_{r/2}(\hat{x}) = \emptyset$ für $t \in (\hat{t} - \epsilon, \hat{t} + \epsilon)$ und $\epsilon > 0$ hinreichend klein, also $E_\Omega(x_0) \cap [(\hat{t} - \epsilon, \hat{t} + \epsilon) \times \mathcal{B}_{r/2}(\hat{x})] = \emptyset$.
Die Aussage über den Rand folgt ähnlich.

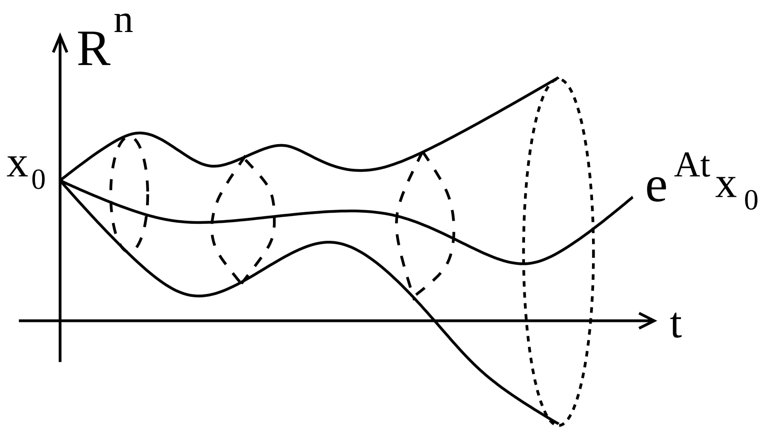


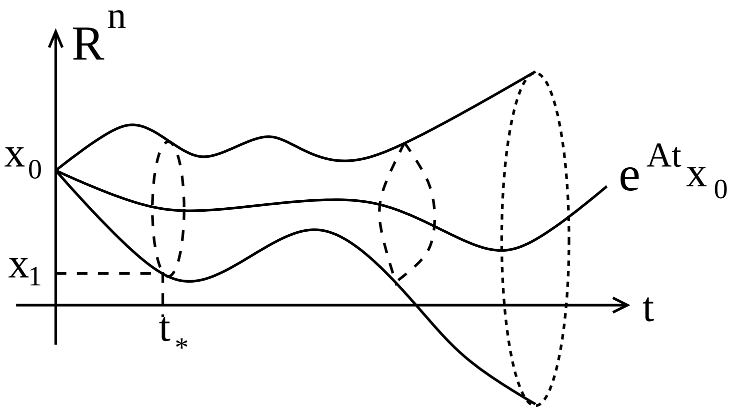
Bild: Erreichbarkeitskegel. Querschnitte sind die Erreichbarkeitsmengen.

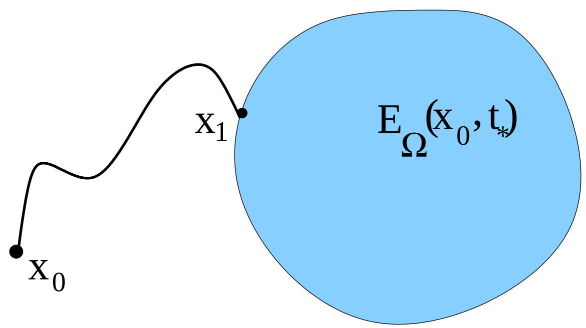
Erreichbarkeitkeitsmenge. Grundtatsachen VIII

Aus Fakt 8 folgt

Fakt 9: Wenn x_0 zu irgendeiner Zeit nach x_1 steuerbar ist,
dann gibt es dafür eine minimale Zeit t_* und es ist

$$x_1 \in \partial E_\Omega(x_0, t_*).$$





Diese Tatsache motiviert die Untersuchung von Steuerungen, welche zum Rand einer Erreichbarkeitsmenge steuern (extremale Steuerungen).

Randpunkte und Normalen konvexer Mengen

Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $x_* \in K$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) x_* ist ein Randpunkt von K.

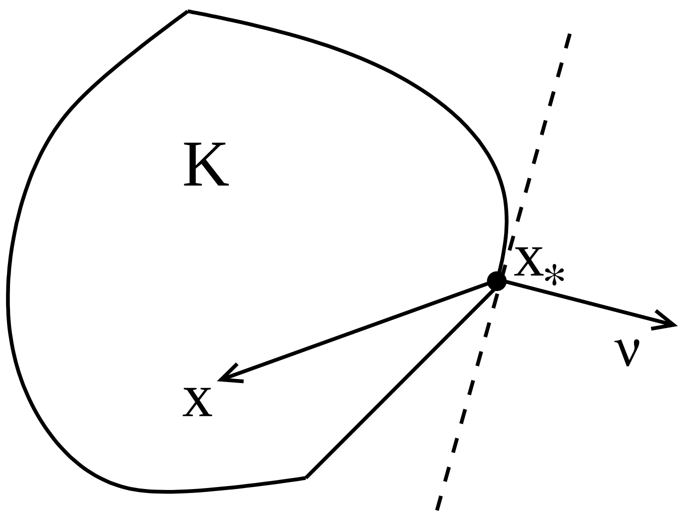
(b) Es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, so dass

$$\nu^\top (x - x_*) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in K \qquad (*)$$

Der Vektor ν heißt äußere Normale von K an x_*.

(*) ist äquivalent zu

$$\nu^\top x_* = \max_{x \in K} \nu^\top x.$$



Extremale Steuerungen

Definition:

$u_e \in L^\infty([0, t_*], \Omega)$ heisst extremale Steuerung, falls der zugehörige Endzustand

$$x_e(t_*) = e^{At_*} x_0 + \int_0^{t_*} e^{A(t_*-s)} B u_e(s)\, ds$$

ein Randpunkt von $E_\Omega(x_0, t_*)$ ist (i.e. $x_e(t_*) \in \partial E_\Omega(x_0, t_*)$).

Da $E_\Omega(x_0, t_*)$ konvex ist, gibt es eine äussere Normale $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ an $x_e(t_*)$. D.h.

$$\nu^\top x_e(t_*) = \max_{x \in E_\Omega(x_0, t_*)} \nu^\top x.$$

Satz über extremale Steuerungen und das Maximumprinzip

Satz: Sei $u_e \in L^\infty([0,t_*],\mathbb{R}^m)$ extremale Steuerung mit Zustand $x_e(\cdot)$.
Sei $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ äussere Normale von $E_\Omega(x_0,t)$ an $x_e(t_*)$ und sei

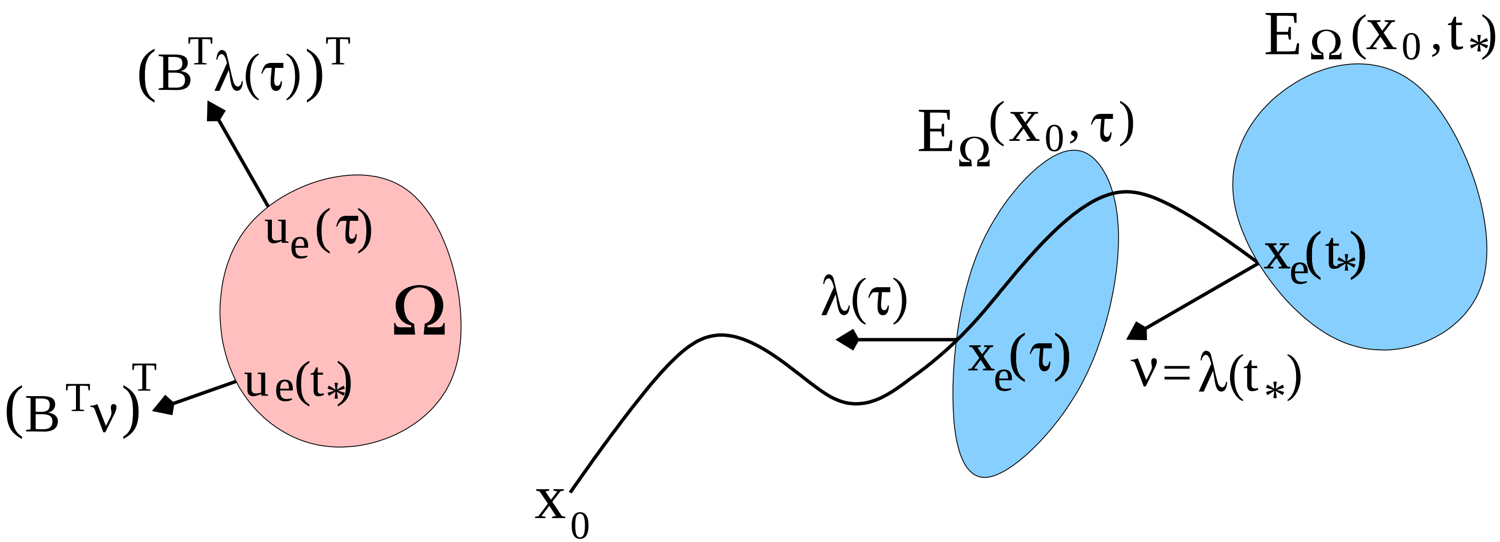
$$\lambda : [0,t_*] \to \mathbb{R}^n, \qquad \dot\lambda = -A^\top \lambda, \quad \lambda(t_*) = \nu \qquad \text{(adjungierte DGL,Endwertproblem)}$$

Dann gilt für fast alle $\tau \in (0,t_*]$,

(a) $\lambda(\tau)$ ist äussere Normale von $E_\Omega(x_0,\tau)$ an $x_e(\tau) \in \partial E_\Omega(x_0,\tau)$.

(b) $(B^\top \lambda(\tau))^\top$ ist äussere Normale von Ω an $u_e(\tau) \in \partial\Omega$. Äquivalente Aussage

$$\lambda(\tau)^\top B\, u_e(\tau) = \max_{\hat u \in \Omega} \lambda(\tau)^\top B\, \hat u. \qquad \textbf{(Maximumprinzip)}$$



Der Beweis des Maximumprinzips für extremale Steuerungen

Beweis: Das Endwertproblem $\dot{\lambda} = -A^\top \lambda, \quad \lambda(t) = \nu$ hat die Lösung

$$\lambda(\tau)^\top = \nu^\top e^{A(t_*-\tau)}.$$

Für eine Steuerung $u \in L^\infty([0, t_*], \Omega)$ mit zugehörigem Zustandsverlauf x_u setze

$$\phi_u(\tau) = \lambda(\tau)^\top (x_u(\tau) - x_e(\tau)).$$

Direkte Rechnug ergibt

$$\begin{aligned} \phi_u(\tau) &= \nu^\top e^{A(t_*-\tau)} \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} B(u(s) - u_e(s))\, ds = \int_0^\tau \nu^\top e^{A(t_*-s)} B(u(s) - u_e(s))\, ds \\ &= \int_0^\tau \lambda(s)^\top B\,(u(s) - u_e(s))\, ds. \qquad (*) \end{aligned}$$

Für $\tau = t_*$ hat man, da $\nu = \lambda(t_*)$ äussere Normale ist,

$$0 \geq \nu^\top (x_u(t_*) - x_e(t_*)) = \phi_u(t_*) = \int_0^{t_*} \lambda(s)^\top B\,(u(s) - u_e(s))\, ds \qquad (**)$$

Da $u(s) \in \Omega$ beliebig, folgt,

$$0 \geq \lambda(s)^\top B(\hat{u} - u_e(s)) \quad \text{für alle } \hat{u} \in \Omega \text{ und fast alle } s. \qquad (***)$$

Also (b). Mit $(*)$ folgt, dass $0 \geq \lambda(\tau)^\top (x_u(\tau) - x_e(\tau))$ für $u \in L^\infty([0, t], \Omega)$, also (a).

Zu (***): Wenn die Menge $Q := \{s \in [0, t_*] \mid \text{Es gibt } \hat{u}_s \text{ mit } 0 < \lambda(s)^\top B(\hat{u}_s - u_e(s))\ \}$ positives Maß hätte, dann wäre im Widerspruch zu $(**)$,

$$0 < \int_0^{t_*} \lambda(s)^\top B\,(u(s) - u_e(s))\, ds \qquad \text{für} \qquad u(s) := \begin{cases} \hat{u}_s & s \in Q, \\ u_e(s) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Maximum- und Minimumprinzip

Bemerkung:
Wenn man als Endwert für λ die innere Normale $-\nu$ wählt, dann wird das Maximumprinzip zum Minimumprinzip:

$$\lambda(\tau)^\top B\, u_e(\tau) = \min_{\hat{u}\in\Omega} \lambda(\tau)^\top B\, \hat{u}.$$

Extremale Steuerungen beim Einheitswürfel

Wir betrachten extremale Steuerungen für

$$\Omega = \{\, u \in \mathbb{R}^m \mid |u^i| \le 1 \,\} \qquad \text{Einheitswürfel}$$

Sei $B = [b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots b_m]$. Die i-te Komponente des Vektors $\lambda(\tau)^\top B$ ist

$$\sigma_i(\tau) := (\lambda(\tau)^\top B)^i = \lambda(\tau)^\top b_i = \nu^\tau e^{A(t-\tau)} b_i. \qquad \textbf{(Schaltfunktion)}$$

Damit kann das **Maximumprinzip für eine extremale Steuerung**

$$\lambda(\tau)^\top B\, u_e(\tau) = \max_{\hat{u} \in \Omega} \lambda(\tau)^\top B\, \hat{u}$$

geschrieben werden als

$$\sum_i \sigma_i(\tau)\, u_e^i(\tau) = \max_{\hat{u} \in \Omega} \sum_i \sigma_i(\tau) \hat{u}^i = \sum_i |\sigma_i(\tau)|. \qquad (\text{wegen } \hat{u}^i \in [-1,1]).$$

Es folgt

$$u_e^i(\tau) = sign(\sigma_i(\tau)) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sigma_i(\tau) > 0 \\ \text{beliebig} & \text{wenn } \sigma_i(\tau) = 0 \\ -1 & \text{wenn } \sigma_i(\tau) < 0. \end{cases}$$

Diejenigen τ, für die $\sigma_i(\tau) = 0$ heissen Schaltpunkte. Da σ_i analytische Funktion ist, gilt:

Entweder $\sigma_i \equiv 0$ oder σ_i hat nur endlich viele Schaltpunkte.

Weiterhin gilt:

Wenn rang $[b_i \;\; Ab_i \;\; A^2 b_i \;\; \ldots \;\; A^{n-1} b_i] = n$, dann hat σ_i nur endlich viele Schaltpunkte.

Beweis: $\sigma_i \equiv 0$ impliziert $0 = \frac{d^k \sigma_I}{d\tau^k}(0) = (-1)^k \nu^\top A^k\, b_i$, also $\nu \perp \text{span}\{b_i \;\; Ab_i \;\; A^2 b_i \ldots A^{n-1} b_i\}$.
Letzteres ist nicht möglich, wenn die Kalman-Matrix von (A, b_i) Rang n hat.

Normale Systeme und Bang-Bang-Steuerung

Ein System (A, B) heisst normal, wenn

$$\text{rang}\,[b_i \;\; Ab_i \;\; A^2 b_i \; \ldots \; A^{n-1} b_i] = n$$

für alle Spalten b_i von B.

Zweck dieser Definition: ein normales System hat nur endlich viele Schaltpunkte.

Eine Steuerung u mit $u^i(\tau) \in \{-1, 1\}$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen τ heisst

Bang-Bang.

Eine extremale Steuerung eines normalen Systems ist stets Bang-Bang.

Vollständige Nullsteuerbarkeit bei beschränktem Steuerbereich

Satz: Angenommen, es gilt

(a) rang $[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots A^{n-1}B] = n$ (Kalmanbedingung)

(b) Re$(\lambda) \leq 0$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A.

Dann gibt es zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein minimales t_*

und eine extremale Steuerung $u \in L^\infty([0,t],\Omega)$, so dass

$$x(t_*) = e^{At_*}x_0 + \int_0^{t_*} e^{A(t_*-s)}Bu(s)\,ds = 0.$$

Bemerkungen:

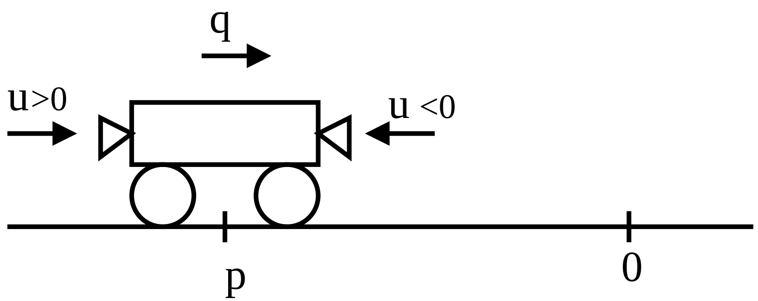
Die Existenz einer Nullsteuerung ist unmittelbar klar, wenn Re$(\lambda) < 0$ für alle λ, Denn dann ist das ungesteuerte System aymptotisch stabil und man muss dem System nur noch den letzten kleinen Schubs nach 0 geben. Im Fall Re$(\lambda) = 0$ ist der Beweis schwieriger. Siehe Macki/Strauß.

Wir haben $0 \in \partial E_\Omega(x_0, t_*)$. Dies folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Erreichbarkeitsmengen von t und der Minimalität von t_*.

Zeitoptimale Steuerung: Raketenwagen 1

Situation: Raketenwagen bewegt sich auf der x-Achse.

Ortskoordinate:	$p(t)$
Geschwindigkeit:	$q(t)$
Schub:	$u(t)$



DGL (alle Konstanten auf 1 gesetzt):

$$\dot{p} = q, \; \dot{q} = u. \qquad \text{Matrix-Vektor-Form:} \qquad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Steuerbeschränkung: $|u(t)| \leq 1$.

Ziel: Steuerung nach $(p, q) = (0, 0)$ in minimaler Zeit.

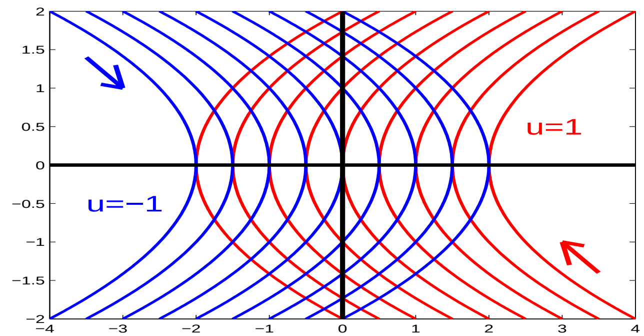
Steuerung ist Bang-Bang.

Es ist: $\ddot{p} = u$.

Bei konstantem Schub $u = 1$: $\quad p = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = \frac{1}{2}(t + c_1)^2 + c_2 - c_1^2/2 = \frac{q^2}{2} + \alpha$

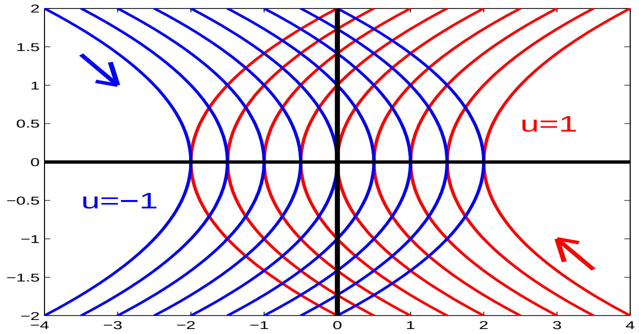
Bei konstantem Schub $u = -1$: $\quad p = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 = -\frac{1}{2}(t + c_1)^2 + c_2 + c_1^2/2 = -\frac{q^2}{2} + \alpha$

Trajektorien $(p(t), q(t))$ sind Parabeln:



Zeitoptimale Steuerung: Raketenwagen 2

Noch einmal die Trajektorien:



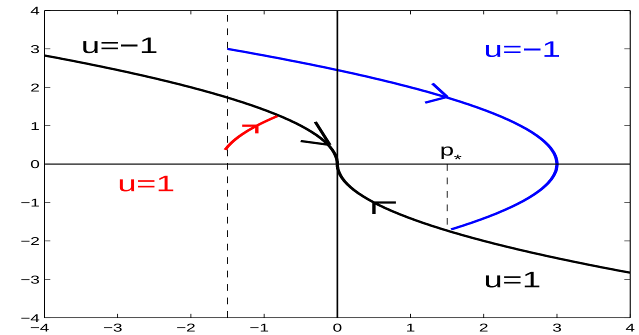
Die Parabelhälften, die bei 0 einlaufen, sind im unteren Bild schwarz eingezeichnet. Sie bilden die sogenannte Schaltkurve. Schaltregel um optimal nach Null zu steuern:

1) Wenn (p, q) oberhalb der Schaltkurve: voller Rückwärtsschub $u = -1$.

2) Wenn (p, q) unterhalb der Schaltkurve: voller Vorwärtsschub $u = 1$.

3) Bei Erreichen der Schaltkurve: volle Schubumkehr.

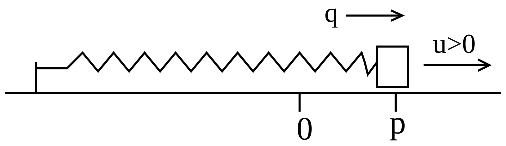
Das untere Bild zeigt die Steuerung nach 0 bei gleichem Anfangsort aber verschiedener Anfangsgeschwindigkeit. Berechnung der Schaltstelle p_* ist Hausaufgabe.

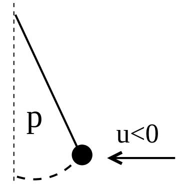


Zeitoptimale Steuerung: Harmonischer Oszillator 1

Situation: schwingende Feder oder linearisiertes Pendel.

Ortskoordinate:	$p(t)$
Geschwindigkeit:	$q(t)$
Schub:	$u(t)$





DGL (alle Konstanten auf 1 gesetzt):

$$\dot p = q,\ \dot q = -p + u. \qquad \text{Matrix-Vektor-Form:} \qquad \begin{bmatrix} \dot p \\ \dot q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Steuerbeschränkung: $|u(t)| \le 1$.

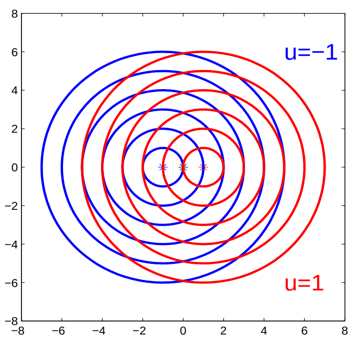
Ziel: Steuerung nach $(p, q) = (0, 0)$ in minimaler Zeit.

Steuerung ist Bang-Bang.

Bei konstantem Schub $u = 1$: $\quad (p-1)^2 + q^2 = r^2$ (Kreis um $(1, 0)$)

Bei konstantem Schub $u = -1$: $\quad (p+1)^2 + q^2 = r^2$ (Kreis um $(-1, 0)$)

Trajektorien (Kreise) $(p(t), q(t))$ werden im Uhrzeigersinn durchlaufen.



Zeitoptimale Steuerung: Harmonischer Oszillator 2

Schaltfunktion:

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= \nu^\top e^{A(t_*-\tau)}b = \sigma\left(\begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(t_*-\tau) & \sin(t_*-\tau)\\ -\sin(t_*-\tau) & \cos(t_*-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &= \nu_1\sin(t_*-\tau)+\nu_2\cos(t_*-\tau) = \rho\sin(\phi+t_*-\tau)\end{aligned}$$

Intervalle zwischen den Umschaltzeiten haben Länge π.

In diesen Zeitintervallen wird ein Halbkreis durchlaufen.

Die Schaltlinie (schwarz) im Bild unten besteht aus Halbkreisen mit Radius 1.

Schaltregel:

1) Wenn (p,q) oberhalb der Schaltkurve: voller Rückwärtsschub $u=-1$.

2) Wenn (p,q) unterhalb der Schaltkurve: voller Vorwärtsschub $u=1$.

3) Bei Erreichen eines der inneren schwarzen Halkreise: volle Schubumkehr.

Herleitung:
Vom Ende her denken.
Ohne Umschalten gelangt man zu 0 auf jedem der be
inneren schwarzen Halbkreise (die an 0 grenzen).
Die Schaltfunktion erzwingt ein letztes Umschalten
bei $t_1 \in [t_*-\pi, t_*]$. Zwischen dem ersten Umschalten
bei, sagen wir, t_0 und dem letzten Umschalten bei t_1
werden Halbkreise (blau, rot) durchlaufen, weil das
Intervall zwischen zwei Schaltpunkten Länge π hat.
Diese Halbkreise enden jeweils auf einem der
schwarzen Halbkreise.