

Vorlesung Variationsrechnung und optimale Steuerung

5. Foliensatz, Version vom 8.7.2014

Michael Karow

Steuerbarkeit 1: Motivation

Problem mit festen Endpunkten : Minimiere

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}}_{\text{pos. semidef.}} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds \quad \text{wobei} \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_*) = x_1$$

Grundsätzliches Vorgehen analog zum freien Endwertproblem. Definiere:

$$\begin{aligned} J^\lambda(x, u) &:= \int_0^{t_*} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top (Ax + Bu - \dot{x}) ds \\ &= \int_0^{t_*} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top (Ax + Bu) + \dot{\lambda}^\top x ds - \underbrace{\lambda(s)^\top x(s)}_{=0} \Big|_{s=0}^{s=t_*} \end{aligned}$$

Seien $v \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^m)$, $h \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^n)$ mit $h(0) = h(t_*) = 0$.

Taylorentwicklung(exakt) : $J^\lambda(x + h, u + v) = J^\lambda(x, u) + L(h, v) + \overbrace{J(h, v)}^{\geq 0},$

wobei

$$L(h, v) = \int_0^{t_*} \underbrace{(A^\top \lambda + R^\top u + Qx + \dot{\lambda})^\top}_{(a)} h + \underbrace{(Pu + Rx + B^\top \lambda)^\top}_{(b)} v ds - \underbrace{\lambda(s)^\top h(s)}_{=0} \Big|_{s=0}^{s=t_*}$$

Folgerungen: (x, u) minimiert $J^\lambda \Leftrightarrow (a)=0, (b)=0$.

(x, u) minimiert $J \Leftrightarrow (a)=0, (b)=0$ und $\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0, x(t_*) = x_1$.

Problem: gibt es überhaupt eine Steuerung, so dass $x(t_*) = x_1$?

(Wenn z.B. $B = 0$, dann kann überhaupt nicht gesteuert werden)

Steuerbarkeit 2

Fragestellung: Seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gegeben. Gibt es $u \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^m)$, so dass

$$x_1 = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \quad ?$$

(Steuerbarkeit des Systems (A, B) von x_0 nach x_1 im Zeitintervall $[0, t]$.)

Umformulierung: Ist $x_1 - e^{At} x_0$ im Bild des Operators

$$\mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^m) \ni u \longmapsto \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \in \mathbb{R}^n \quad ?$$

Falls diese Frage stets mit 'ja' beantwortet werden kann,
heisst das durch (A, B) definierte System **vollständig steuerbar**.

Ein Lemma über semidefinite Matrizen

Zur Beantwortung der Steuerbarkeitsfrage brauchen wir folgende Tatsache.

Lemma: Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit.

Dann sind folgende Aussagen über $z \in \mathbb{R}^n$ äquivalent.

- (a) $z \in (\text{range } M)^\perp$,
- (b) $z^\top M z = 0$,
- (c) $M z = 0$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): $z^\top (M z) = 0$, weil $M z \in \text{range } M$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wenn $M z = 0$ dann ist $0 = (M z)^\top x = z^\top (M x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Betrachte die Funktion

$$f(t) = (z - t M z)^\top M (z - t M z), \quad t \in \mathbb{R}$$

mit Ableitung

$$\dot{f}(t) = -(M z)^\top M (z - t M z) - (z - t M z)^\top M (M z).$$

Da M positiv semidefinit ist, hat man $f(t) \geq 0$ für alle t .

Wenn zusätzlich $z^\top M z = 0$, dann nimmt f das Minimum 0 bei $t = 0$ an. Also,

$$0 = \dot{f}(0) = -(M z)^\top M z - z^\top M (M z) = -2 \|M z\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad M z = 0.$$

Folgerung aus (c) $\Rightarrow$ (b): M ist invertierbar $\Leftrightarrow M$ ist positiv definit.

Steuerbarkeit 3

Wir betrachten: $G(s) := e^{A(t-s)}B$, $\Gamma(t) := \int_0^t G(s)G(s)^\top ds = \int_0^t e^{A(t-s)}BB^\top e^{A^\top(t-s)} ds$.

$\Gamma(t)$ ist positiv semidefinit, weil $G(s)G(s)^\top$ positiv semidefinit ist.

Satz 1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Es gibt $u \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^m)$ so dass $x = \int_0^t G(s)u(s) ds$.

(b) Es gibt $z \in \mathbb{R}^n$ so dass $x = \Gamma(t)z$.

Angenommen, (b) ist erfüllt. Dann sind alle Lösungen von (a) von der Form

$$u(s) = u_0(s) + h(s), \quad \text{wobei} \quad u_0(s) := G(s)^\top z, \quad \int_0^t G(s)h(s) ds = 0.$$

Es ist

$$\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds = \int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|h(s)\|_2^2 ds \geq \int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds = z^\top \Gamma(t) z = z^\top x.$$

Beweis: nächste Seite.

Folgerungen:

Die linearen Operatoren $u \mapsto \int_0^t G(s)u(s) ds$ und $z \mapsto \Gamma(t)z$ haben dasselbe Bild.

Das durch (A, B) definierte System ist genau dann vollständig steuerbar,

wenn $\Gamma(t)$ invertierbar ist. In diesem Fall ist

$$u_0(s) = B^\top e^{A^\top(t-s)} \Gamma(t)^{-1} x \quad \text{mit} \quad x := x_1 - e^{At} x_0$$

die eindeutige Steuerung mit minimalen Normquadrat $\int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds = x^\top \Gamma(t)^{-1} x$, welche x_0 im Zeitintervall $[0, t]$ nach x_1 steuert.

Terminologie: $\Gamma(t)$ heißt Gramsche Matrix der Steuerbarkeit.

Steuerbarkeit 4

Beweis von Satz 1. $(b) \Rightarrow (a)$: Aus $\Gamma(t)z = x$ und $u_0(s) = G(s)^\top z$ folgt

$$\int_0^t G(s)u_0(s) ds = \int_0^t G(s)G(s)^\top z ds = \Gamma(t)z = x.$$

Wir haben dann auch

$$\int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds = \int_0^t u_0(s)^\top u_0(s) ds = z^\top \int_0^t G(s)G(s)^\top ds z = z^\top \Gamma(t) z = z^\top x.$$

Sei u so dass $x = \int_0^t G(s)u(s) ds$ und $h(s) = u(s) - u_0(s)$. Dann ist $\int_0^t G(s)h(s) ds = 0$.
Wenn die letzte Gleichung für irgendein h erfüllt ist, dann $\int_0^t G(s)(u_0(s) + h(s)) ds = x$,

$$\|u(s)\|_2^2 = (u_0(s) + h(s))^\top (u_0(s) + h(s)) = \|u_0(s)\|_2^2 + 2u_0(s)^\top h(s) + \|h(s)\|_2^2,$$

und $\int_0^t u_0(s)^\top h(s) ds = z^\top \int_0^t G(s)h(s) ds = 0$. Somit,

$$\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds = \int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|h(s)\|_2^2 ds.$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Die Menge $V = \{ \int_0^t G(s)u(s) ds \mid u \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{R}^m) \}$ ist ein Vektorraum.

Sei $v \in (\text{range } \Gamma(t))^\perp$. Dann

$$0 = v^\top \Gamma(t)v = \int_0^t v^\top G(s)G(s)^\top v ds = \int_0^t \|v^\top G(s)\|_2^2 ds \quad \Rightarrow \quad v^\top G(s) = 0 \text{ für alle } s \in [0, t].$$

Letzteres impliziert $v^\top x = 0$ für alle $x \in V$.

Also, $V^\perp \subseteq (\text{range } \Gamma(t))^\perp \subseteq V$. Also, $V \subseteq \text{range } \Gamma(t)$ Also folgt (a) aus (b) .

Steuerbarkeit 5

Wir bestimmen nun das Bild von $\Gamma(t)$. Notation:

$\mathcal{C}(A, B)$ = kleinster A -invarianter Unterraum, der $\text{range } B$ enthält.

Kalman-Matrix: $C_{A,B} := [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{C}^{n \times nm}$.

Satz: Es ist $\mathcal{C}(A, B) = \text{range } C_{A,B} = \text{range } \Gamma(t)$ für alle $t > 0$.

Beweis: $\mathcal{C}(A, B)$ ist die Menge aller v der Form

$$v = \sum_{j=0}^p A^j B z_j, \quad p \in \mathbb{N}, \quad z_j \in \mathbb{C}^m.$$

Konsequenz des Cayley-Hamilton Theorems: A^n ist eine Linearkombination der Potenzen A^k , $k = 0, \dots, n-1$. Also ist auch jedes A^j eine Linearkombination von A^k , $k = 0, \dots, n-1$.
Folgerung:

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \tilde{z}_k = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \tilde{z}_0 \\ \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{n-1} \end{bmatrix},$$

Das beweist die erste Gleichung des Satzes.

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Steuerbarkeit 6

Fortsetzung des Beweises. Zu zeigen: $\text{range } \Gamma(t) = \text{range } [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$

Wir haben

$$z \in (\text{range } \Gamma(t))^\perp \Leftrightarrow 0 = z^\top \Gamma(t) z = \int_0^t \|z^\top e^{A(t-s)} B\|_2^2 ds \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = z^\top e^{A(t-s)} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^\top A^k B}{k!} (t-s)^k \quad \text{for all } s \in [0, t] \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow z^\top A^k B = 0 \quad \text{for all } k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathcal{C}(A, B)^\perp \quad (4)$$

(1) gilt, weil $\Gamma(t)$ positiv semidefinit ist, siehe Lemma.

(3) gilt, weil eine Potenzreihe genau dann die Nullfunktion ist, wenn alle Koeffizienten 0 sind.

Wir haben gezeigt, dass $(\text{range } \Gamma(t))^\perp = \mathcal{C}(A, B)^\perp$. Folglich, $\text{range } \Gamma(t) = \mathcal{C}(A, B)$. $\square$.

Steuerbarkeit 7

Zusammenfassung: Seien $t > 0$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{C}^n$.

Es gibt eine Steuerung $u(\cdot) \in \mathcal{PC}([0, t], \mathbb{C}^m)$ so dass

$$x_1 = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (5)$$

genau dann, wenn $x_1 - e^{At}x_0 \in \text{range } \Gamma(t) = \mathcal{C}(A, B) = \text{range}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$.

Angenommen diese Bedingung ist erfüllt mit $x_1 - e^{At}x_0 = \Gamma(t)z$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Dann ist eine solche Steuerung gegeben durch

$$u_0(s) = B^\top e^{A^\top(t-s)}z.$$

Diese hat unter allen solchen Steuerungen minimales Normquadrat.

Folgerung: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das lineare System $\dot{x} = Ax + Bu$ ist vollständig steuerbar.
- (ii) $\mathcal{C}(A, B) = \mathbb{C}^{n \times n}$.
- (iii) Die Matrix $\Gamma(t)$ ist positiv definit für ein (und dann alle) $t > 0$.
- (iv) $\text{rang}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$ (Kalman-Bedingung).

Steuerbarkeit 8

Die Gramsche Matrix der Steuerbarkeit

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B B^\top e^{A^\top(t-s)} ds.$$

löst das Anfangswertproblem

$$\dot{\Gamma} = B B^\top + A \Gamma + \Gamma A^\top, \quad \Gamma(0) = 0.$$

(Beweis: Hausaufgabe)

Im Fall der vollständigen Steuerbarkeit existiert $W(s) := \Gamma(s)^{-1}$ für $s > 0$.

Aus $\dot{W} = -\Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \Gamma^{-1} = -W \dot{\Gamma} W$ folgt die Riccati-DGL

$$\dot{W} = -(W B B^\top W + W A + A^\top W).$$

Für die optimale Steuerung $u_0(s) = B^\top e^{A^\top(t-s)} z$ mit $\Gamma(t) z = x$ hat man dann

$$\int_0^t \|u_0(s)\|_2^2 ds = x^\top z = x^\top W(t) x.$$

Bemerkung: Vollständige Steuerbarkeit ist eine generische Eigenschaft.

D.h., wenn (A, B) nicht vollständig steuerbar ist, dann kann man Matrizen ΔA , ΔB mit beliebig kleinen Einträgen finden, so dass $(A + \Delta A, B + \Delta B)$ vollständig steuerbar ist. $\|W(t)\|$ ist dann aber groß, d.h. $(A + \Delta A, B + \Delta B)$ ist schwer zu steuern.

Beobachtbarkeit

Wir betrachten 2 Zustandsverläufe bei der gleichen Steuerung u :

$$\dot{x}_1(t) = A x_1(t) + B u(t), \quad \dot{x}_2(t) = A x_2(t) + B u(t).$$

Ein Beobachter kennt x_k nicht, sondern nur den **Systemausgang**

$$y_k(t) = C x_k(t), \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Definition: Das System (A, B, C) heißt beobachtbar, falls aus $y_1 \equiv y_2$ folgt, dass $x_1 \equiv x_2$.

Satz: (A, B, C) ist genau dann beobachtbar, wenn
$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (*)$$

Beweis: Wir beweisen nur eine Richtung. Sei $x_d = x_2 - x_1$ und $y_d = y_2 - y_1 = Cx_d$. Zu zeigen: aus $(*)$ und $y_d \equiv 0$ folgt $x_d \equiv 0$. Wir haben $\dot{x}_d = A x_d$, also $y_d(t) = Cx_d(t) = Ce^{At}x_d(0)$. Differenzieren der letzten Gleichung an der Stelle $t = 0$ ergibt

$$0 = \begin{bmatrix} y_d(0) \\ \dot{y}_d(0) \\ \ddot{y}_d(0) \\ \vdots \\ y_d^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_d(0).$$

Aus $(*)$ folgt $x_d(0) = 0$ und damit $x_d \equiv 0$. $\square$

Bemerkung: Höhere Ableitungen geben keine zusätzliche Information wegen Cayley-Hamilton.