Vorlesung Variationsrechnung und optimale Steuerung

4. Foliensatz, Version vom 1.7.2014

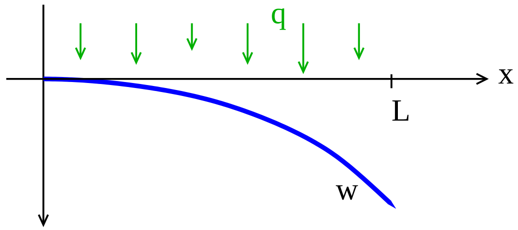
Michael Karow

Variationsprobleme mit höheren Ableitungen.
Beispiel: Balkenbiegung

Sei $w \in \mathcal{PC}^2([0,L],\mathbb{R})$ Biegelinie eines linksseitig eingespannten Balkens mit Biegesteifigkeit σ und Lastschüttung q. Zu minimierendes Energiefunktional

$$J(w) = \int_0^L \frac{1}{2}\,\sigma(x)\,w''(x)^2 - q(x)\,w(x)\,dx, \qquad w(0) = w'(x) = 0.$$

Variation für $h \in \mathcal{PC}^2([0,L],\mathbb{R})$ mit $h(0) = h'(0) = 0$:



$$\begin{aligned}
\delta J(w,h) &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J(x+\epsilon\,h) \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_0^L \frac{1}{2}\,\sigma(x)\,(w+\epsilon\,h)''(x)^2 - q(x)\,(w+\epsilon\,h)(x)\,dx \\
&= \int_0^L \sigma\,w''\,h'' - q\,h\,dx \underset{(*)}{=} \int_0^L ((\sigma\,w'')'' - q)\,h\,dx + (\sigma\,w'')(L)\,h'(L) - (\sigma\,w'')'(L)\,h(L)
\end{aligned}$$

$(*)$ zweimal partiell integrieren.

Aus $\delta J(w,h) = 0$ folgt die Biegedifferentialgleichung mit natürlichen Randbedingungen:

$$(\sigma\,w'')'' = q, \qquad (\sigma\,w'')(L) = (\sigma\,w'')'(L) = 0.$$

Direkte Rechnung (ohne Ableiten) ergibt übrigens

$$J(w+h) = J(w) + \underbrace{\int_0^L \sigma\,w''\,h'' - q\,h\,dx}_{\delta J(w,h)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \sigma\,(h'')^2\,dx}_{\geq 0}$$

Aus $\delta J(w,h) = 0$ für alle h folgt damit, dass w globaler Minimierer ist.

Optimale Steuerung (für gewöhnliche DGL)

Aufgabenstellung: Minimiere

$$J(x,u) = g(x(t_*)) + \int_{t_0}^{t_*} f^0(t, x(t), u(t))\, dt$$

wobei

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)).$$

Dabei kann die Endzeit t_* variabel sein (muss aber nicht).

Nebenbedingungen sind z.B. (können vorliegen oder nicht)

1) $x(0) = x_0$, $x(t_*) = x_1$

2) $u \in \mathcal{U}$

Terminologie:

x = Zustand, u = Steuerung, J = Kostenfunktional

Variationsrechnung: $\dot{x} = u$

Zeitoptimale Steuerung: $J(u) = t_* = \int_0^{t_*} 1\, dt$

Linearer zeitinvarianter Fall: $\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$

Die homogene lineare DGL

Anfangswertproblem: $\dot{x}(t) = A\,x(t), \quad x(0) = x_0.$

Lösung: $x(t) = exp(At)\,x_0 = e^{At}\,x_0 \qquad (*),$

mit der Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{At} := exp(At) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \ldots$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt}(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \ldots) \\
&= A + A^2\,t + A^3\,\frac{t^2}{2} + \ldots \\
&= A(I + A\,t + \frac{(A\,t)^2}{2} + \ldots) \\
&= A\,e^{At}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $(*)$.

Rechenregeln für die Exponentialfunktion

(1) $e^0 = exp(0) = I$

(2) $AB = BA \quad \Rightarrow \quad exp(A + B) = exp(A)\, exp(B)$

(3) $exp(-A) = exp(A)^{-1}$

(4) $exp(VCV^{-1}) = V\, exp(C)\, V^{-1}$

(5) $exp(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_q)) = \mathrm{diag}(exp(A_1), \ldots, exp(A_q))$.

(6) $Av = \lambda\, v \quad \Rightarrow \quad exp(A)v = e^{\lambda}\, v$

Einige Beweisskizzen: (1) ist klar. Zu (2):

$$\begin{aligned} exp(A)\, exp(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+j=n} \frac{n!}{k!j!} A^k\, B^j \\ &\underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = exp(A + B) \end{aligned}$$

$(*)$ stimmt nur, wenn $AB = BA$. (3) folgt aus (1) und (2) mit $B = -A$. Zu (4):
$(VCV^{-1})^k = (VCV^{-1})(VCV^{-1}) \ldots (VCV^{-1})(VCV^{-1}) = VC^kV^{-1}$

$$\Rightarrow \quad exp(VCV^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(VCV^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{VC^kV^{-1}}{k!} = V\, exp(C)\, V^{-1}$$

Exponentialfunktion und Eigenwertmethode zur Lösung der homogenen DGL

Sei $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Spalten v_k eine Basis von Eigenvektoren von A bilden, so dass $Av_k = \lambda_k v_k$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Sei

$$x_0 = \sum_k c_k v_k = [v_1, \ldots, v_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = V c.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = A\,x(t)$, $x(0) = x_0$, ist dann

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} c_k v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_k e^{\lambda_k t} c_k \\
&= \left[v_1, \ldots, v_n\right] \, [e^{\lambda_1 t} c_1, \ldots, e^{\lambda_n t} c_n]^\top \\
&= V \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\, c \\
&= V \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\, V^{-1} x_0 \\
&= exp(V \operatorname{diag}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t)\, V^{-1})\, x_0 \\
&= exp(At)\, x_0.
\end{aligned}$$

Achtung: Nicht jede quadratische Matrix A hat eine Basis von Eigenvektoren.

Matrix-Exponentialfunktion und Jordan-Normalform

Jordan-Normalform:

$$A = V\,\mathrm{diag}(J_1,\ldots,J_q)V^{-1},$$

wobei

$$J_k = [\lambda_k] \qquad \text{oder} \qquad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & & \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Es ist

$$e^{A\,t} = exp(A\,t) = V\,\mathrm{diag}(exp(J_1\,t),\ldots,exp(J_q\,t))V^{-1},$$

wobei

$$exp(J_k t) = [e^{\lambda_k\,t}] \qquad \text{oder} \qquad exp(J_k\,t) = e^{\lambda_k\,t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \ldots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Sei $\lambda_k = \alpha + i\omega$. Dann $|e^{\lambda_k\,t}| = |e^{(\alpha+i\omega)\,t}| = |e^{\alpha\,t}e^{i\omega t}| = e^{\alpha\,t} = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)\,t}$. Folgerung:

$$\lim_{t\to\infty} e^{A\,t} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}(\lambda_k) < 0 \text{ für alle } k \qquad \text{(asymptotische Stabilität)}$$

Reeller 2×2-Fall mit komplexen Eigenwerten

Wenn A reelle Einträge hat, ist auch $exp(At)$ reell, auch wenn die Eigenwerte von A komplex sind. Beispiel:

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so dass $Av = \lambda\, v$, $\lambda = \alpha + i\,\omega$, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $v = v_R + i\, v_I$, $v_R, v_I \in \mathbb{R}^2$.
Hieraus folgt

$$A\,\bar{v} = \bar{\lambda}\,\bar{v}, \qquad \begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_R & v_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} exp(At) &= \begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda\, t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}\, t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & \bar{v} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} v_R & v_I \end{bmatrix} e^{\alpha\, t} \begin{bmatrix} \cos(\omega\, t) & -\sin(\omega\, t) \\ \sin(\omega\, t) & \cos(\omega\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R & v_I \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Lösung des gesteuerten Anfangswertproblems

Anfangswertproblem: Gesucht ist eine stetige Funktion $x : [0, t_*] \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$x(0) = x_0, \qquad \text{und} \qquad \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

an allen Stetigkeitspunkten von $u \in \mathcal{PC}([0, t_*], \mathbb{R}^m)$.

Lösung:

$$x(t) = \underbrace{e^{A\,t}\,x_0}_{(1)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)}B\,u(s)\,ds}_{(2)}\,.$$

(1) ist Lösung des homogenen Anfangswertproblems $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x_0$.
(2) Faltungsintegral. Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems
$\dot{x} = A\,x + B\,u$, $x(0) = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{A\,t}\,x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B\,u(s)\,ds\right)\\
&= A\,e^{A\,t}\,x_0 + \int_0^t A\,e^{A(t-s)}B\,u(s)\,ds + e^{A(t-t)}\,B\,u(t)\\
&= A\,x(t) + B\,u(t).
\end{aligned}$$

Das linear-quadratische Kontrollproblem 1

Problem: Minimiere

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x(t_*)^\top M x(t_*) + \int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds,$$

wobei

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; x(0) = x_0.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die (konstante) Matrix $\begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. P soll positiv definit sein. M ist symmetrisch und positiv semidefinit. Der Endzeitpunkt $t > 0$ ist fest, $x(t)$ ist variabel.

Dieses Problem wird auf den folgenden Seiten durch Einführung eines geeigneten Lagrangeschen Multiplikators $\lambda \in \mathcal{PC}^1([0,t],\mathbb{R}^n)$ (Kozustand, adjungierter Zustand) gelöst.

Lagrange-Multiplikatoren: Grundidee

Ziel: Rückführung eines Minimierungsproblems mit Nebenbedingungen auf ein Minimierungsproblem ohne Nebenbedingungen.

Allgemeine Überlegung:

Seien $\phi, \phi^* : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ beliebige Funktionen und $c \in \mathcal{N}$. Angenommen
1) $\phi(y) = \phi^*(y)$ für alle $y \in \mathcal{D}$ so dass $\nu(y) = c$,
2) $y_0 \in \mathcal{D}$ ist ein globaler Minimierer von $\phi^*(y)$ und $\nu(y_0) = c$.
Dann ist y_0 ein globaler Minimierer von $\phi(y)$ unter der Nebenbedingung $\nu(y) = c$.

Anwendung in der Analysis 2:

Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ und

$$f^\lambda(y) = f(y) + \lambda^\top (g(y) - c).$$

Angenommen, y_0 ist ein globaler Minimierer von $f^\lambda(y)$ und $g(y_0) = c$.
Dann ist y_0 ein globaler Minimierer von $f(y)$ unter der Nebenbedingung $g(y) = c$.
Bei Differenzierbarkeit von f und g hat man:

$$(f^\lambda)_y(y_0) = f_y(y_0) + \lambda^\top g_y(y_0).$$

Durch Transponieren folgt

$$\nabla f^\lambda(y_0) = \nabla f(y_0) + g_y(y_0)^\top \lambda = \nabla f(y_0) + \sum_{i=1}^{m} \nabla g_i(y_0)\, \lambda_i.$$

Methode: Bestimme den Lagrangeschen Multiplikator λ so, dass f^λ einen globalen Minimierer y_0 hat, der die Nebenbedingung $g(y_0) = c$ erfüllt.

Diese Überlegungen werden auch in der Kontrolltheorie angewandt.

Das linear-quadratische Kontrollproblem 2

Problem: Minimiere (P pos. def., M sym. pos. semidef., $t > 0$ fest, $x(t)$ variabel)

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x(t_*)^\top M x(t_*) + \frac{1}{2} \int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}}_{\text{pos. semidef.}} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds$$

wobei

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0. \qquad (*)$$

Zur Lösung dieses Problems definieren wir für $\lambda \in \mathcal{PC}^1([0,t], \mathbb{R}^n)$ das <u>erweiterte Kostenfunktional</u> (Addieren von $\lambda^\top *$ Differentialgleichung):

$$J^\lambda(x,u) := \frac{1}{2} x(t_*)^\top M\, x(t_*) + \int_0^{t_*} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top (Ax + Bu - \dot{x})\, ds$$

Klar: Wenn (x,u) globaler Minimierer von J^λ ist, und x ausserdem $(*)$ löst, dann ist (x,u) auch globaler Minimierer von J unter der Nebenbedingung $(*)$.

Das linear-quadratische Kontrollproblem 3

Erweitertes Kostenfunktional noch einmal:

$$J^\lambda(x,u) := \frac{1}{2}x(t_*)^\top M\,x(t_*) + \int_0^{t_*} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top(Ax + Bu - \dot{x})\,ds$$

Partielle Integration des Terms $\lambda^\top \dot{x}$ ergibt

$$J^\lambda(x,u) = \frac{1}{2}x(t_*)^\top M x(t_*) - \lambda(s)^\top x(s)\Big|_{s=0}^{s=t_*} + \int_0^{t_*} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top(Ax + Bu) + \dot{\lambda}^\top x\,ds$$

Taylorentwicklung von J^λ:

Seien $v \in \mathcal{PC}([0,t],\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathcal{PC}([0,t],\mathbb{R}^n)$ mit $h(0) = 0$.

Dann ergibt eine direkte Rechnung (mit Ausnutzen der Symmetrie der Matrizen), dass

$$J^\lambda(x+h, u+v) = J^\lambda(x,u) + L(h,v) + \overbrace{J(h,v)}^{\geq 0},$$

wobei

$$\begin{aligned} L(h,v) &= x(t_*)^\top M\,h(t_*) - \lambda(s)^\top h(s)\Big|_{s=0}^{s=t_*} + \int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} + \lambda^\top(A\,h + B\,v) + \dot{\lambda}^\top h\,ds \\ &= \underbrace{(Mx(t_*) - \lambda(t_*))^\top}_{(c)} h(t_*) + \int_0^{t_*} \underbrace{(A^\top\lambda + R^\top u + Qx + \dot{\lambda})^\top}_{(a)} h + \underbrace{(P\,u + R\,x + B^\top\lambda)^\top}_{(b)} v\,ds \end{aligned}$$

Folgerungen: (x,u) minimiert $J^\lambda \Leftrightarrow$ (a)=0,(b)=0,(c)=0.

(x,u) minimiert $J \Leftrightarrow$ (a)=0,(b)=0,(c)=0 und $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$.

Das linear-quadratische Kontrollproblem 4

Problem: Minimiere (P pos. def., M pos. semidef., $t > 0$ fest, $x(t)$ variabel)

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x(t_*)^\top M x(t_*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}}_{\text{pos. semidef.}} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds, \quad \text{wobei } \dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0.$$

Auf der letzten Folie habe wir gesehen:

(x,u) minimiert J dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

(a) $A^\top\lambda + R^\top u + Qx + \dot{\lambda} = 0$

(b) $P\,u + R\,x + B^\top\lambda = 0.$

(c) $\lambda(t_*) = M\,x(t_*)$

Umformuliert:

(a') $\dot{\lambda} = -(A^\top\lambda + R^\top u + Qx)$

(b') $u = -P^{-1}(B^\top\lambda + Rx).$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = (A - BP^{-1}R)x - BP^{-1}B^\top\lambda \\ \dot{\lambda} &= -A^\top\lambda - R^\top u - Qx = (-A^\top + R^\top P^{-1}B^\top)\lambda + (-Q + R^\top P^{-1}R)x. \end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BP^{-1}R & BP^{-1}B^\top \\ -Q + R^\top P^{-1}R & -(A - BP^{-1}R)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ausserdem hat man die <u>Randwerte:</u> $x(0) = x_0$, $\lambda(t_*) = M\,x(t_*)$.

Das linear-quadratische Kontrollproblem 5

Problem: Minimiere (P pos. def., M pos. semidef., $t > 0$ fest, $x(t)$ variabel)

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x(t_*)^\top Mx(t_*) + \frac{1}{2}\int_0^{t_*} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix}}_{\text{pos. semidef.}} \begin{bmatrix} u(s) \\ x(s) \end{bmatrix} ds, \quad \text{wobei } \dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0.$$

<u>Bisheriges Ergebnis:</u> $x(0) = x_0$, $\lambda(t_*) = Mx(t_*)$, $u = -P^{-1}(B^\top\lambda + Rx)$ und

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BP^{-1}R & BP^{-1}B^\top \\ -Q + R^\top P^{-1}R & -(A - BP^{-1}R)^\top \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Die Matrix H ist von der Form

$$H = \begin{bmatrix} \hat{A} & F \\ -G & -\hat{A}^\top \end{bmatrix}, \quad F^\top = F, \quad G^\top = G, \qquad \text{(Hamiltonsche Matrix).}$$

<u>Elimination von λ:</u> Mache Ansatz $\lambda(s) = W(s)\,x(s)$ mit $W(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es folgt

$$-(G + \hat{A}^\top W)x = \dot{\lambda} = \dot{W}\,x + W\,\dot{x} = \dot{W}\,x + W\,(\hat{A} + FW)x.$$

Umgestellen und Weglassen des Faktors x ergibt die

Riccati-Differentialgleichung für W: $\qquad \dot{W} = -(G + \hat{A}^\top W + W\hat{A} + WFW).$

Die Randbedingung $\lambda(t_*) = M\,x(t_*)$ wird erfüllt, wenn $W(t_*) = M$.

Bemerkungen zur Riccati-DGL

Riccati-Differentialgleichung für $W(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\qquad \dot{W} = -(G + \hat{A}^\top W + W\hat{A} + WFW) \qquad (*)$

'Endwert': $W(t_*) = M$, $\quad M$ symmetrisch, positiv semidefinit,

Existenzbereich von W: $D_W \subseteq \mathbb{R}$

- Aus $G = G^\top$ und $F = F^\top$, folgt durch Transponieren von $(*)$,

$$W^\top = -(G + \hat{A}^\top W + W\hat{A} + W^\top F W^\top).$$

Wegen Eindeutigkeit der Lösung und $W(t_*) = W(t_*)^\top$ ist $W(s) = W(s)^\top$ für alle $s \in D_W$.

- Man kann zeigen (dies ist beweiswürdig): Wenn G, F positiv semidefinit sind, dann

$$(-\infty, t_*] \subseteq D_W$$

und $W(s)$ ist positiv semidefinit für $s \leq t$.

Das linear-quadratische Kontrollproblem 6

Riccati-Endwertproblem für $W(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$**:**

$$\dot W = -(G + \hat A^\top W + W\hat A + WFW), \qquad W(t) = M.$$

mit $\quad \hat A = A - BP^{-1}R, \qquad F = BP^{-1}B^\top, \qquad G = Q - R^\top P^{-1}R.$

Adjungierter Zustand: $\quad \lambda = Wx.$

Feedbackform der optimalen Steuerung: $\quad u = -P^{-1}(B^\top W + R)x \qquad (*)$

Minimalwert von J**:** $\quad J(x,u) = \frac{1}{2} x_0^\top W(0) x_0 \qquad (**).$

Beweis: $(*)$ folgt, weil $u = -P^{-1}(B^\top\lambda + Rx)$. Zu $(**)$: Wir haben

$$-u^\top Pu = u^\top(B^\top\lambda + Rx) = \lambda^\top Bu + u^\top Rx \qquad (+)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(x^\top Wx) &= \frac{d}{ds}(\lambda^\top x) = \lambda^\top \dot x + x^\top\dot\lambda = \lambda^\top(Ax+Bu) - x^\top(A^\top\lambda + R^\top u + Qx)\\
&= \lambda^\top Bu - x^\top R^\top u - x^\top Qx\\
&= (\lambda^\top Bu + u^\top Rx) - u^\top Rx - x^\top R^\top u - x^\top Qx \underset{(+)}{=} -\begin{bmatrix} u\\ x\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R\\ R^\top & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ x\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
J(x,u) &= \frac{1}{2} x(t_*)^\top M x(t_*) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}(x^\top Wx)\,ds\\
&= \frac{1}{2} x(t_*)^\top M x(t_*) + \frac{1}{2}(x_0^\top W(0)x_0 - x(t_*)^\top \overbrace{W(t_*)}^{M} x(t_*)).
\end{aligned}$$

Das linear-quadratische Kontrollproblem 7

Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich folgende Lösungsmethode für das linear-quadratische Kontrollproblem:

1) Löse zunächst die Riccati-Gleichung für W mit Endwert $W(t_*) = M$.

2) Löse das Anfangwertproblem

$$\dot{x} = Ax - B\underbrace{(P^{-1}B^\top W + R)x}_{-u}, \qquad x(0) = x_0.$$

3) Die optimale Steuerung ist

$$u = -(P^{-1}B^\top W + R)x.$$

(Feedbackform, d.h. u ist Funktion von x)

Das linear-quadratische Kontrollproblem 8

Noch einmal das erweiterte Kostenfunktional:

$$J^\lambda(x,u) = \frac{1}{2} x(t_*)^\top M x(t_*) - \lambda(s)^\top x(s)\Big|_{s=0}^{s=t_*} + \int_0^{t_*} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} + \lambda^\top (Ax + Bu)}_{=: H(x,\lambda,u)} + \dot{\lambda}^\top x \, ds$$

H heisst Hamiltonfunktion.

Die Differentialgleichungen für einen Minimierer (x,u) sind

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad \dot{\lambda} = -(A^\top \lambda + R^\top u + Qx).$$

Diese Gleichungen können geschrieben werden als

$$\dot{x} = \nabla_\lambda H(x,\lambda,u), \qquad \dot{\lambda} = -\nabla_x H(u,\lambda,u) \qquad \text{(Hamiltonsche DGL).}$$

Hinzu kommt die algebraische Gleichung:

$$0 = Pu + Rx + B^\top \lambda = \nabla_u H(x,\lambda,u)$$

Direkte Rechnung (ohne Ableiten) ergibt für $\widehat{u} := u + v$,

$$H(x,\lambda,\widehat{u}) = H(x,\lambda,u+v) = H(u,x,\lambda) + v^\top \underbrace{(Pu + Rx + B^\top \lambda)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} v^\top P v}_{\geq 0}$$

Also hat man für das optimale u:

$$H(x,\lambda,u) = \min_{\widehat{u}} H(x,\lambda,\widehat{u}). \qquad \text{(Pontryaginsches Minimumprinzip).}$$