# Vorlesung Variationsrechnung und optimale Steuerung

**3. Foliensatz, Version vom 1.7.2014**

Michael Karow

# Erinnerung: Der Satz über implizite Funktionen

Sei $g : \mathbb{R}^{p+n} \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ $m$-mal stetig differenzierbar.

Sei $(x_0, y_0) \in G$ mit $g(x_0, y_0) = c$.

Angenommen, an der Stelle $(x_0, y_0)$ ist die Matrix der partiellen Ableitungen nach $y$,

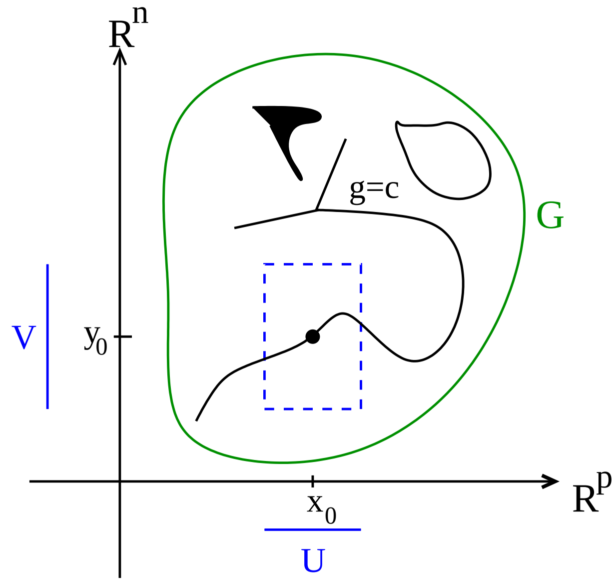
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

invertierbar.

Dann gibt es Umgebungen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ von $x_0$ und $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $y_0$, so dass gilt:

Für jedes $x \in \mathcal{U}$ hat die Gleichung $g(x, y) = c$ genau eine Lösung $y(x) \in \mathcal{V}$.

Die Funktion $x \mapsto y(x)$ ist mindestens so oft stetig partiell differenzierbar wie $g$.



# Differenzierbarkeit von Extremalen

Sei $x$ Extremale für $f$. Angenommen,

- $x$ hat an der Stelle $t_0$ keine Ecke,
- in einer Umgebung von $t_0$ existiert die Ableitungsmatrix $f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ und hängt stetig von $t_0$ ab.
- Die Matrix $f_{\dot{x}\dot{x}}(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ ist invertierbar.

Dann ist $x$ an der Stelle $t_0$ mindestens so oft stetig partiell differenzierbar wie $f$.

**Beweis:**

Sei $f$ $m$-mal stetig differenzierbar. Setze

$$g(t, u) := f_{\dot{x}}(t, x(t), u) - \int_a^t f_x(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds$$

Dann ist (1. Euler-Lagrange Gleichung in Integralform)

$$g(t, \dot{x}(t)) = c. \qquad t \in [a, b].$$

Die Ableitungsmatrix von $g$ nach $u$ an der Stelle $(t_0, \dot{x}(t_0))$ ist $f_{\dot{x}\dot{x}}(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$.
Nach Voraussetzung ist diese Matrix invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen liefert die Existenz einer $(m-1)$-mal differenzierbaren Funktion $t \mapsto u(t)$, so dass

$$g(t, u(t)) = c.$$

Wegen der (lokalen) Eindeutigkeit folgt

$$u(t) = \dot{x}(t) \qquad \square$$

## Isoperimetrische (integrale) Nebenbedingung: Problemstellung

Griechisch: isos=gleich, peri=herum, metron=Maß

**Frage:**

Welche geschlossene Kurve vorgegebener Länge L umschließt die größtmögliche Fläche?

Dieses Problem hatte (laut Sage) die phönizische Königin **Dido** bei der Gründung von Karthago (8. oder 9. Jhrdt. v.Ch. ) zu lösen.

**Intuitive Lösung:** Kreislinie. (stimmt auch)

**Mathematische Formulierung des Problems:**

Minimiere

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_a^b x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\,dt \qquad \text{(negativer Flächeninhalt)}$$

unter der Nebenbedingung

$$I(x) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt = L \qquad \text{(Umfang).}$$

## Zum Dido-Problem: Herleitung der Flächeninhaltsformel aus dem Integralsatz von Gauß

**Allgemeiner Integralsatz von Gauß:**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial G$, und sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_G \text{div}(v(x))\, dx = \int_{\partial G} v(x)^\top n(x)\, do_x,$$

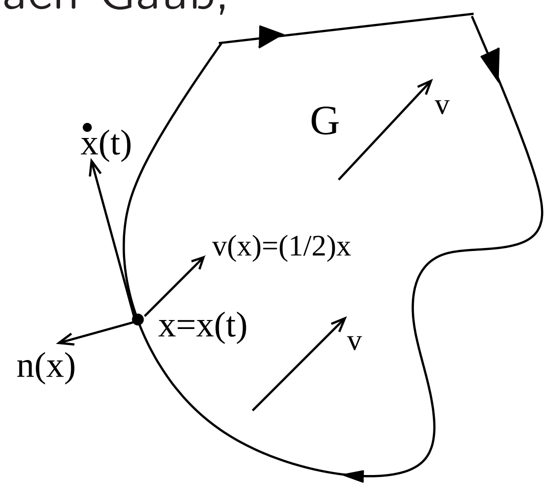
wobei $\text{div}(v(x)) = \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(x)$, und $n(x)$ der Einheitsnormalenvektor ist.

**Speziell für** $n = 2$**:** Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine im Uhrzeigersinn laufende geschlossene Kurve, deren Bildpunkte $x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^\top$ den Rand von $G$ bilden. Dann ist

$$n(x)\, do_x = n(x)\, ds = \dot{x}^\perp\, dt = \begin{bmatrix} -\dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} dt.$$

Wähle nun $v(x) = \frac{1}{2}[x_1 \;\; x_2]^\top$. Dann ist $\text{div}(v(x)) = 1$. Somit nach Gauß,

$$\begin{aligned} \text{Fl.inhalt}(G) &= \int_G 1\, dx = \int_G \text{div}(v(x))\, dx \\ &= \int_{\partial G} v(x)^\top n(x)\, do_x = \int_a^b \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -\dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b -x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1\, dt \end{aligned}$$



## Erinnerung: Extrema mit Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^n$

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. **Problem:**

Minimiere $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = c$.

**Satz:** Sei $x$ Minimalstelle und $\nabla g(x) \neq 0$.
Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator), so dass

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$

**Beweisidee:** Sei $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, so dass $\gamma(0) = x$ und $g(\gamma(t)) = c$ für alle $t$. Dann,

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g(\gamma(t)) = [\nabla g(x)]^\top \dot{\gamma}(0). \qquad (*)$$

Die Funktion $t \mapsto f(\gamma(t))$ nimmt ihr Minimum bei $t = 0$ an. Also,

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t)) = [\nabla f(x)]^\top \dot{\gamma}(0). \qquad (**)$$

$(*)$, $(**)$ und $\nabla g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$

(Anmerkung: man kann zeigen, dass es in der Niveau-Menge $g(x) = c$
$(n-1)$ Kurven mit linear unbhängigen Ableitungen $\dot{\gamma}(0)$ gibt)

# Isoperimetrische Nebenbedingung: Definition und Satz

Im folgenden seien $f, g$ stetig differenzierbar und

$$I(x) = \int_a^b g(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \qquad J(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \qquad x \in \mathcal{PC}^1([a,b], \mathbb{R}^n).$$

**Definition:** $x_0 \in \mathcal{PC}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ heißt schwacher lokaler Minimierer von $J$ unter der Nebenbedingung $I(x) = c$, wenn $I(x_0) = c$ und ein $\epsilon_0 > 0$ existiert, so dass

$$J(x_0) \leq J(x) \text{ wenn } \|x - x_0\|_\infty + \|\dot{x} - \dot{x}_0\|_\infty < \epsilon_0 \text{ und } I(x) = c.$$

Es können noch Randbedingungen hinzu kommen.

**Notationsvereinfachung:** $x = x_0$

**Satz:** Sei $x$ ein schwacher lokaler Minimierer von $J$ unter der Nebenbedingung $I(x) = c$. Angenommen, es gibt ein $h_* \in \mathcal{PC}_0^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\delta I(x, h_*) \neq 0$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikator), so dass

$$\delta(J - \lambda\, I)(x, h) = 0 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{PC}_0^1([a,b], \mathbb{R}^n).$$

Äquivalent dazu ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}(f - \lambda\, g)_{\dot{x}} = (f - \lambda\, g)_x\, .$$

# Isoperimetrische Nebenbedingung: der Beweis.

Nach Normierung von $h_*$ haben wir $\delta I(x, h_*) = 1$. Wir beweisen, dass der Satz über die isoperimetrische Nebenbedingung gilt mit $\lambda := \delta J(x, h_*)$. Sei $h \in \mathcal{PC}_0^1([a,b], \mathbb{R}^n)$.

Definiere $\qquad \widehat{h} = h - \delta I(x,h)\, h_*, \qquad \phi(\epsilon, \theta) := I(x + \epsilon\, \widehat{h} + \theta\, h_*), \qquad \epsilon, \theta \in \mathbb{R}.$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_{(\epsilon,\theta)=(0,0)} \phi(\epsilon,\theta) &= \delta I(x, h_*) = 1, \\
\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{(\epsilon,\theta)=(0,0)} \phi(\epsilon,\theta) &= \delta I(x, \widehat{h}) = \delta I(x, h - \delta I(x,h)\, h_*) = \delta I(x,h) - \delta I(x,h)\, \delta I(x, h_*) = 0.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es $y : [-\epsilon_0, \epsilon_0] \to \mathbb{R}$ diff'bar, so dass

$$c = \phi(0,0) = \phi(\epsilon, y(\epsilon)), \qquad \Rightarrow\ 0 = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \phi(\epsilon, y(\epsilon)) = \delta\, I(x, \widehat{h}) + y'(0)\, \delta I(x, h_*) = y'(0).$$

Setze $\qquad x_\epsilon := x + \epsilon\, \widehat{h} + y(\epsilon)\, h_*.$

Dann ist $I(x_\epsilon) = c$. Die Funktion $\epsilon \mapsto J(x_\epsilon)$ nimmt bei $\epsilon = 0$ ihr Minimum an. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} J(x_\epsilon) &= \delta J(x, \widehat{h}) + \delta J(x, h_*)\, y'(0) = \delta J(x, \widehat{h}) \\
&= \delta J(x, h - \delta I(x,h)\, h_*) \\
&= \delta J(x,h) - \underbrace{\delta J(x, h_*)}_{\lambda}\, \delta I(x,h) = \delta(J - \lambda\, I)(x,h). \qquad \square
\end{aligned}$$

## Lösung des Dido-Problems

**Aufgabe:** Minimiere

$$J(x) = \int_a^b x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 \, dt \qquad \text{(doppelter negativer Flächeninhalt)}$$

unter den Nebenbedingungen $x(a) = x(b)$ und

$$I(x) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \, dt = L \qquad \text{(Umfang).}$$

**Euler-Lagrange-Gleichung:** $\displaystyle \frac{d}{dt}(f - \lambda\, g)_{\dot{x}} = (f - \lambda\, g)_x \, .$

In diesem Fall:

$$\frac{d}{dt}\left(-x_2 - \lambda \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}\right) = \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} x_2, \qquad \frac{d}{dt}\left(x_1 - \lambda \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}\right) = -\dot{x}_1 = -\frac{d}{dt} x_1.$$

Wir wollen annehmen, dass keine Ecken vorliegen. Dann folgt:

$$2\, x_2 + \lambda \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = c_1, \qquad 2\, x_1 - \lambda \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} = c_2.$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit $\dot{x}_2$, der 2. mit $\dot{x}_1$, und Addition ergibt

$$0 = 2\, x_2\, \dot{x}_2 + 2\, x_1\, \dot{x}_1 - c_1\, \dot{x}_2 - c_2\, \dot{x}_1 = \frac{d}{dt}(x_2^2 + x_1^2 - c_1\, x_2 - c_2\, x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_2^2 + x_1^2 - c_1\, x_2 - c_2\, x_1 = c_3 \quad \Rightarrow \quad (x_2 - \frac{c_1}{2})^2 + (x_1 - \frac{c_2}{2})^2 = c_3 + \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} \qquad \text{(Kreisgleichung)}$$

# Das hängende ideale Seil (Kette)

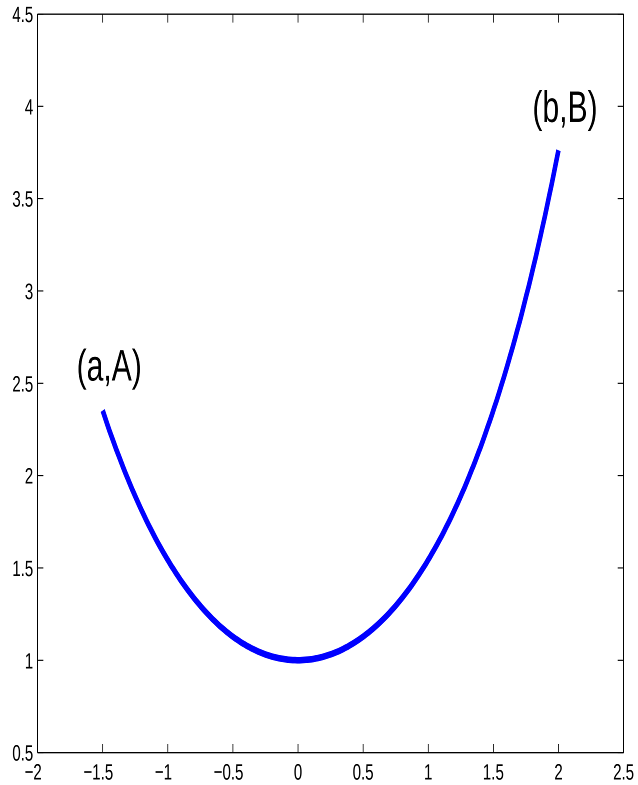
**Aufgabe:** Minimiere die potentielle Energie $\rho\, g J(x)$, ($\rho$=Dichte, $g$ Fallbeschleunigung) des hängenden Seiles (oder der Kette), wobei

$$J(x) = \int_a^b x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

unter den Nebenbedingungen

$x(a) = A$, $x(b) = B$ und

$$I(x) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = L \qquad \text{(Länge).}$$




**Euler-Lagrange-Gleichung:** $\frac{d}{dt}(f-\lambda\, g)_{\dot{x}} = (f-\lambda\, g)_x$

In diesem Fall:

$$\frac{d}{dt}\frac{(x-\lambda)\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \sqrt{1+\dot{x}^2}.$$

Wegen $\dot{x} = \frac{d}{dt}(x-\lambda)$ ist dies die gleiche Euler-Lagrange Gleichung, die man auch für die minimale Rotationsfläche erhält, wenn man $x$ durch $x-\lambda$ ersetzt. Die allgemeine Lösung ist daher

$$x-\lambda = c\cosh\left(\frac{x-\lambda}{c}+d\right).$$

Aus diesem Grund wird die cosh-Kurve auch Kettenlinie genannt.

# Ableiten von Integralen

1) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \phi(s)\,ds = \phi(t).$

2) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^b \phi(s,t)\,ds = \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,t)\,ds.$

3) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \phi(s,t)\,ds = \phi(t,t) + \int_a^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,t)\,ds.$

1) gilt, wenn $\phi$ an der Stelle $t$ stetig ist (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung).

2) gilt, wenn $[a,b]$ sich in endlich viele Intervalle $I_j$ zerlegen lässt, so dass $\phi$ und $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ auf $I_j \times [t-\delta, t+\delta]$ für ein $\delta > 0$ stetig sind.

3) gilt unter der eben genannten Bedingung, wenn $t$ im Inneren von einem der Intervalle $I_j$ liegt.

# Ein Problem mit variabler Integrationsgrenze

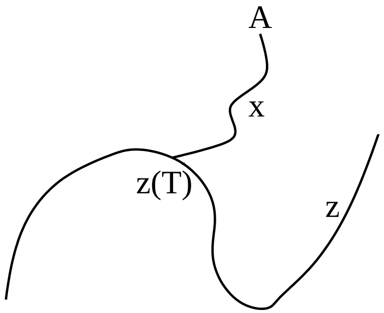
Wir betrachten das Funktional

$$J(x,T) = \int_a^T f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt, \qquad x \in \mathcal{PC}^1([a,b],\mathbb{R}^n), \quad x(a) = A, \quad T < b.$$

**Satz.** Sei $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion.

Für einen Minimierer von $J$ unter den Nebenbedingungen

$$x(a) = A, \qquad x(T) = z(T)$$




gilt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = f_x$$

und außerdem die **Transversalitätsbedingung**

$$f(T,x(T),\dot{x}(T)) + f_{\dot{x}}(T,x(T),\dot{x}(T))(\dot{z}(T) - \dot{x}(T)) = 0.$$

(Mit $\dot{x}(T)$ ist genau genommen $\dot{x}(T-)$ gemeint.)

# Ein Problem mit variabler Integrationsgrenze: Beweis I

Sei $J(x,T) = \int_a^T f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$ und $x(\epsilon,t) := x_\epsilon(t) := x(t) + \epsilon\,h(t)$ mit $h(a) = 0$.

Wir nehmen im folgenden an, dass $\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}$ existiert und berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon} J(x+\epsilon\,h, T+\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_a^{T+\epsilon} f(t, x(t)+\epsilon\,h(t), \dot{x}(t)+\epsilon\,\dot{h}(t))\,dt \\
&= f(T, x(T)+\epsilon\,h(T), \dot{x}(T)+\epsilon\,\dot{h}(T))|_{\epsilon=0} \\
&\quad + \int_a^T \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(t, x(t)+\epsilon\,h(t), \dot{x}(t)+\epsilon\,\dot{h}(t))\,dt \\
&= f(T,x(T),\dot{x}(T)) + \int_a^T f_x\,h + f_{\dot{x}}\,\dot{h}\,dt \\
&= f(T,x(T),\dot{x}(T)) + \int_a^T (f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}})\,h\,dt + f_{\dot{x}}(T,x(T),\dot{x}(T))\,h(T).
\end{aligned}$$

Nun schreiben wir $h(T)$ um:

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} x(\epsilon, T+\epsilon) = \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(0,T) + \frac{\partial x}{\partial t}(0,T) = h(T) + \dot{x}(T) \quad \Rightarrow \quad h(T) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} x(\epsilon, T+\epsilon) - \dot{x}(T).$$

Insgesamt: $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J(x+\epsilon\,h, T+\epsilon) =$

$$\int_a^T (f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}})\,h\,dt + f(T,x(T),\dot{x}(T)) + f_{\dot{x}}(T,x(T),\dot{x}(T)) \left( \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} x(\epsilon, T+\epsilon) - \dot{x}(T) \right)$$

## Ein Problem mit variabler Integrationsgrenze: Beweis II

Resultat von der letzten Folie:

$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J(x+\epsilon\, h, T+\epsilon) =$

$$\int_a^T (f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}})\, h\, dt + f(T, x(T), \dot{x}(T)) + f_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) \left( \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} x(\epsilon, T+\epsilon) - \dot{x}(T) \right)$$

Da die Variation $x_\epsilon = x(\epsilon, \cdot)$ die Nebenbedingung erfüllen soll, haben wir

$$x(\epsilon, T+\epsilon) = z(T+\epsilon)$$

und somit

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} x(\epsilon, T+\epsilon) = \dot{z}(T).$$

Für einen Minimierer ist die Ableitung von $J$ Null, also

$$0 = \int_a^T (f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}})\, h\, dt + f(T, x(T), \dot{x}(T)) + f_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T))\, (\dot{z}(T) - \dot{x}(T))\,.$$

Hieraus folgt der Satz, falls die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt ist.
Diese gilt aber aufgrund des Fundamentallemmas, weil (festgehaltenes $T$)

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} J(x+\epsilon\, h, T) = 0 \qquad \text{für } h \in \mathcal{PC}_0^1([a,T], \mathbb{R}^n). \quad \square$$

## Anwendung: Die kürzeste Verbindung eines Punktes zu einer Kurve

Zu minimieren:

$$J(x,T) = \int_a^T \|\dot{x}(t)\|_2 \, dt, \qquad x(a) = A, \quad x(T) = z(T).$$

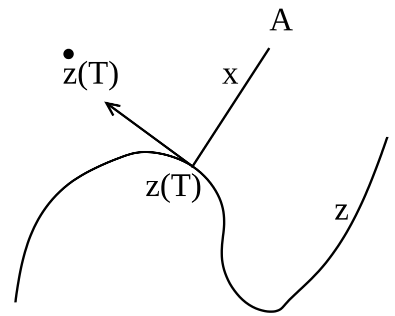
Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\|x(t)\|_2} = 0$$

Hieraus folgt: $\dot{x} = c \, \|x(t)\|_2$. Integration: $x(t) = c \int_a^t \|\dot{x}(s)\|_2 \, ds + c_2 = c \, \phi(t) + c_2$.
$x$ ist eine Gerade mit Richtungsvektor $c$.

Transversalitätsbedingung:

$$0 = \|\dot{x}(T)\|_2 + \frac{\dot{x}(T)^\top}{\|\dot{x}(T)\|_2} (\dot{z}(T) - \dot{x}(T))$$




Multiplikation mit $\|\dot{x}(T)\|_2$ ergibt

$$0 = \|\dot{x}(T)\|_2^2 + \dot{x}(T)^\top (\dot{z}(T) - \dot{x}(T)) = \dot{x}(T)^\top \dot{z}(T).$$

Die Gerade $x$ steht senkrecht auf der Kurve $z$.