Vorlesung Variationsrechnung und optimale Steuerung

2. Foliensatz, Version vom 1.7.2014

Michael Karow

Die Eckenbedingungen I

Wir untersuchen den Fall, dass eine Extremale x an der Stelle t eine Ecke hat, d.h.

$$\dot{x}(t-) \neq \dot{x}(t+).$$

Aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen in Integralform

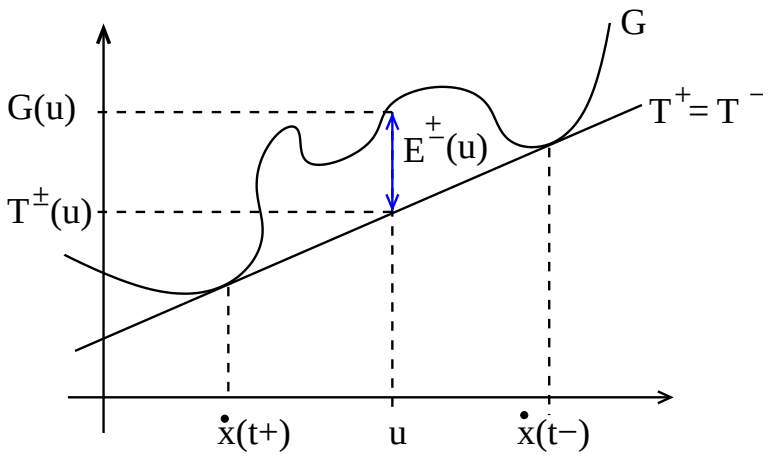
$$\begin{aligned} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) &= \int_a^t f_x(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds + c, \\ f(t, x(t), \dot{x}(t)) - f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\, \dot{x}(t) &= \int_a^t f_t(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds + c \end{aligned}$$

folgen wegen der Stetigkeit der Integrale die

Weierstraß-Erdmannschen Eckenbedingungen:

$$\begin{aligned} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t-)) &= f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t+)), \\ f(t, x(t), \dot{x}(t-)) - f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t-))\, \dot{x}(t-) &= f(t, x(t), \dot{x}(t+)) - f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t+))\, \dot{x}(t+). \end{aligned}$$

Die Eckenbedingungen II



Um aus den Eckenbedingungen weitere Folgerungen zu ziehen, führen wir zusätzliche Notationen ein:

$$
\begin{aligned}
G(u) &:= f(t, x(t), u) \\
E^-(u) &:= E_f(t, x(t), \dot{x}(t-), u) \\
E^+(u) &:= E_f(t, x(t), \dot{x}(t+), u) \\
T^-(u) &:= f(t, x(t), \dot{x}(t-)) + f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t-))(u - \dot{x}(t-)) \\
T^+(u) &:= f(t, x(t), \dot{x}(t+)) + f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t+))(u - \dot{x}(t+))
\end{aligned}
$$

Nach Definition der Exzess-Funktion haben wir die Taylor-Entwicklungen von G:

$$
\begin{aligned}
G(u) &= T^-(u) + E^-(u) \qquad \text{Taylor-Entwicklung um } \dot{x}(t-) \text{ mit Rest } E^- \\
G(u) &= T^+(u) + E^+(u) \qquad \text{Taylor-Entwicklung um } \dot{x}(t+) \text{ mit Rest } E^+
\end{aligned}
$$

Beachte, dass $T^-(\dot{x}-) = G(\dot{x}-)$ und $T^-(\dot{x}+) = G(\dot{x}+)$, und daher

$$E^-(\dot{x}-) = 0, \qquad E^+(\dot{x}+) = 0.$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium ist $E^-(u) \geq 0$ und $E^+(u) \geq 0$ für alle u.

Aus den Eckenbedingungen folgt sofort, dass die Taylor-Entwicklungen identisch sind:

$$T^-(u) = T^+(u) \qquad \text{und daher auch} \quad E^-(u) = E^+(u)$$

Die Situation ist im Bild oben illustriert.

Die 2. Ableitung nach $\dot{x}$

Erinnerung:

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{bmatrix} f_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \cdots & f_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \cdots & f_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{bmatrix}, \qquad f_{\dot{x}_i\dot{x}_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Im folgenden nehmen wir an, dass die Einträge von $f_{\dot{x}\dot{x}}$ stetig von allen Variablen abhängen. Dann ist $f_{\dot{x}\dot{x}}$ symmetrisch (Satz von Schwartz).

Lemma: Sei $x \in \mathcal{PC}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Wenn die Strecke $(t, x(t), u_0, u_0 + s\,v),\ s \in [0,1]$, im Definitionsbereich von f enthalten ist, dann gibt es ein $\theta \in [0,1]$ so dass

$$E_f(t, x(t), u_0, u_0 + v) = v^\top f_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), u_0 + \theta\, v)\, v \qquad (*)$$

Beweis: Die rechte Seite von $(*)$ ist das Lagrange-Restglied der Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von $u \mapsto G(u) = f(t, x(t), u)$ an der Stelle u_0.

Hier ist ein direkter Beweis: Sei $\alpha(s) = f(t, x(t), u_0 + s\,v),\ s \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \alpha(0) - \int_0^1 (-1)\,\dot{\alpha}(s)\,ds = \alpha(0) - (1-s)\,\dot{\alpha}(s)|_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 (1-s)\,\ddot{\alpha}(s)\,ds \\ &= \alpha(0) + \dot{\alpha}(0) + \int_0^1 (1-s)\,\ddot{\alpha}(s)\,ds = \alpha(0) + \dot{\alpha}(0) + \underbrace{\int_0^1 (1-s)\,ds}_{=1/2}\ \ddot{\alpha}(\theta), \quad \theta \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ausrechnen der Ableitungen von α ergibt die Taylor-Entwicklung.

Die 2. Ableitung nach $\dot{x}$ und die Nichtecken-Bedingung

Satz: Sei $x \in \mathcal{PC}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ Extremale für f.
Wenn $f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ existiert und **positiv definit** ist,
dann hat x an der Stelle t **keine Ecke** (d.h. es ist $\dot{x}(t+) = \dot{x}(t-)$).

Beweis: Wir haben bereits gesehen (siehe Bild auf der vorletzten Seite),
dass an einer Ecke gelten muss

$$E_f(t,x(t),\dot{x}(t+),\dot{x}(t-)) = 0. \qquad (*)$$

Angenommen $\dot{x}(t+) \neq \dot{x}(t-)$. Dann ist $v := \dot{x}(t-) - \dot{x}(t+) \neq 0$ und daher

$$0 < v^\top f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t+)+\theta\, v)\, v = E_f(t,x(t),\dot{x}(t+),\dot{x}(t-))$$

wegen der Definitheit von $f_{\dot{x}\dot{x}}$. Dies widerspricht $(*)$ $\square$

Die 2. Ableitung nach $\dot{x}$ und die notwendige Bedingung von Legendre

Vorbemerkung: Die Legendre-Bedingung ist eine notwendige Bedingung für einen schwachen Minimierer. Sie ist eine Konsequenz der Weierstraß-Bedingung und leichter anzuwenden als diese.

Satz: Sei $x \in \mathcal{PC}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ein schwacher Minimierer von $J(x) = \int_a^b f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$. Dann sind die Matrizen

$$f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t+)) \qquad \text{und} \qquad f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t-))$$

für jedes $t \in [a,b]$ **positiv semidefinit**.

Beweis: (für $t-$) Angenommen, $f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t-))$ ist nicht positiv semidefinit. Dann gibt es ein $v \neq 0$ so dass

$$v^\top f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),x(t-))\,v < 0.$$

Wegen Stetigkeit gibt es ein $\lambda > 0$, so dass

$$v^\top f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),x(t-)+\theta\,\lambda\,v)\,v < 0 \qquad \text{für alle } \theta \in [0,1],$$

also auch

$$(\lambda\,v)^\top f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x(t),x(t-)+\theta\,\lambda\,v)\,(\lambda\,v) < 0 \qquad \text{für alle } \theta \in [0,1].$$

Daraus folgt:

$$E_f(t,x(t),\dot{x}(t-),\dot{x}(t-)+\lambda\,v) < 0.$$

Dies widerspricht der Weierstraß-Bedingung. □

Anwendung: die kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten

Problem: $\int_a^b \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \to \min, \qquad x(a)=A,\, x(b)=B.$

Die 2. Euler-Lagrange-Gleichung ergibt:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+\dot{x}^2(t)} - \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\,\dot{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right)$$

$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = const = c_1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_1\,t + c_2$

Diese Rechnung gilt in jedem Intervall, in dem $\dot{x}(t)$ existiert. Für verschiedene solche Intevalle könnten die Konstanten verscheiden sein. Dies würde eine Zickzacklinie bedeuten.
Wir müssen also noch Ecken ausschließen. Wir haben

$$\frac{d^2}{d\dot{x}^2}\sqrt{1+\dot{x}^2(t)} = (1+\dot{x}^2(t))^{-3/2} > 0.$$

Es gibt also keine Ecken und die Legendre-Bedingung ist auch erfüllt.

Die 2. Variation.

Seien $x, h \in \mathcal{PC}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ und $J(x) = \int_a^b f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$. Die 2. Variation on J ist

$$\delta^2 J(x,h) \;=\; \frac{d^2}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} J(x+\epsilon\,h) \;=\; \int_a^b \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}P(t) & R(t)\\ R(t)^\top & Q(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix} dt,$$

wobei

$$P(t) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_1^2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_1\,\partial \dot{x}_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_n \partial \dot{x}_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_n^2}(\xi) \end{bmatrix}, \quad Q(t) = f_{xx}(t) \;=\; \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi) \end{array}\right],$$

$$R(t) = f_{x\dot{x}}(t) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial \dot{x}_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial \dot{x}_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial \dot{x}_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial \dot{x}_n}(\xi) \end{bmatrix}, \qquad \xi = (t,x(t),\dot{x}(t)).$$

Im skalaren Fall $x(t) \in \mathbb{R}$ hat man

$$\begin{aligned}\delta^2 J(x,h) \;&=\; \int_a^b f_{\dot{x}\dot{x}}(t)\,\dot{h}(t)^2 + 2\,f_{\dot{x}x}(t)\,\dot{h}(t)\,h(t) + f_{xx}(t)\,h(t)^2\,dt \\ &=\; \int_a^b \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}f_{\dot{x}\dot{x}}(t) & f_{\dot{x}x}(t)\\ f_{\dot{x}x}(t) & f_{xx}(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix} dt\end{aligned}$$

Beweis: Hausaufgabe.

Taylor-Entwicklung bis zur 2. Ordnung und Folgerungen

Wenn f 3mal stetig differenzierbar ist, dann für alle $h \in \mathcal{PC}_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$,

$$J(x+h) = J(x) + \delta J(x,h) + \frac{1}{2}\,\delta^2 J(x,h) \;+\; \rho(\dot{h})\|\dot{h}\|_2^2,$$

wobei

$$\|\dot{h}\|_2^2 = \int_a^b \|\dot{h}(t)\|_2^2\,dt \qquad \text{und} \quad \rho(\dot{h}) \to 0 \text{ für } \|\dot{h}\|_\infty \to 0$$

Beweis: siehe z.b. Maccluer.

Folgerungen: Sei $\delta J(x,h) = 0$ für alle h.

Notwendig für ein schwaches Minimum:

$$\delta^2 J(x,h) \geq 0. \qquad \text{(positive Semidefinitheit von } \delta^2 J(x,\cdot))$$

Hinreichend für ein schwaches Minimum:

$$\delta^2 J(x,h) \geq \gamma\,\|\dot{h}\|_2^2 \quad \text{für ein } \gamma > 0.$$

(gleichmäßige positive Definitheit von $\delta^2 J(x,\cdot)$)

Notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für positive (Semi)definitheit

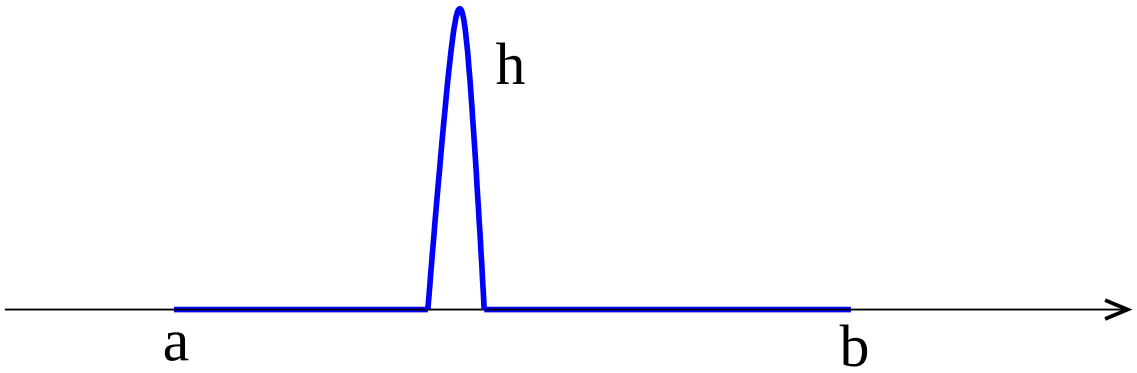
Betrachte

$$\delta^2 J(x,h) \;=\; \int_a^b \begin{bmatrix}\dot h(t)\\ h(t)\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}P(t) & R(t)\\ R(t)^\top & Q(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot h(t)\\ h(t)\end{bmatrix} dt \quad \text{mit } P = f_{\dot x\dot x}, Q = f_{xx}, R = f_{x\dot x}.$$

Wenn $\delta^2 J(x,h) \geq 0$ für alle $h \in \mathcal{PC}_0^1$, dann ist $P(t)$ positiv semidefinit für alle $t \in [a,b]$ (Legendre).

Wenn $\delta^2 J(x,h) > 0$ für alle $h \in \mathcal{PC}_0^1$, dann ist $P(t)$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$.

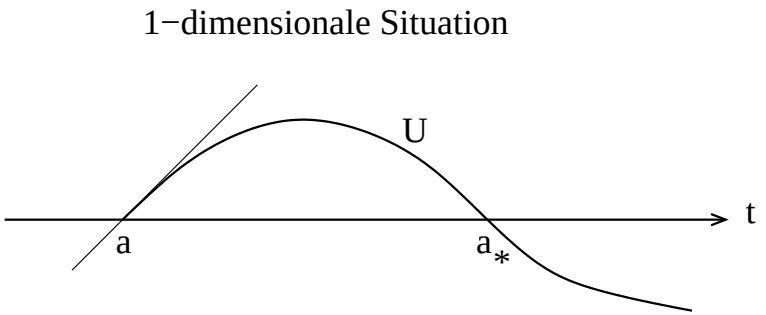
Beweis: Plausibilität: Wähle h steil und schmal. Dann $\delta^2 J(x,h) \approx \int_a^b \dot h(t)^\top P(t)\, \dot h(t)\, dt$.



Das Jacobi-Kriterium für einen schwachen Minimierer

Notation und Voraussetzungen: Sei

- $\delta^2 J(x,h) = \int_a^b \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(t) & R(t) \\ R(t)^\top & Q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix} dt,$



- $P(t)$ positiv definit für alle $t \in [a,b]$,
- $U : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ die Lösung des Jacobischen Anfangswertproblems (2. Ordnung)

$$\frac{d}{dt}(P\dot{U} + RU) = R^\top \dot{U} + QU, \qquad U(a) = 0, \quad \dot{U}(a) = I.$$

Definition:
$a_* > a$ heißt konjugierter Punkt zu a, wenn $U(a_*)$ singulär (skalarer Fall: $U(a_*) = 0$) ist.

Satz (Jacobi): Sei x eine Extremale für $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$, $x(a) = A, x(b) = B$.

- Wenn im Intervall $[a,b]$ kein konjugierter Punkt zu a liegt, dann ist x ein schwacher lokaler Minimierer für J.
- Wenn im Intervall $[a,b)$ ein konjugierter Punkt zu a liegt, dann ist x kein lokaler schwacher Minimierer für J.

Beweis des Jacobi-Satzes I

Lemma: Sei $P(t)$ positiv definit für alle t und
sei $U : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ die Lösung des Jacobischen Anfangswertproblems (2. Ordnung)

$$\frac{d}{dt}(P\dot{U} + RU) = R^\top \dot{U} + Q\,U, \qquad U(a) = 0, \quad \dot{U}(a) = I. \qquad (*)$$

Dann gilt für alle $h = Uw$, $w \in \mathcal{PC}_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$:

$$\int_a^b \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(t) & R(t) \\ R(t)^\top & Q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix} dt = \int_a^b (U\dot{w})^\top P(U\dot{w})\,dt \geq 0. \qquad (**)$$

Beweis. Sei q die linke Seite von $(**)$. Direkte Rechnung:

$$q = \int_a^b \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} U & \dot{U} \\ 0 & U \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P & R \\ R^\top & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \dot{U} \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix} dt = \int_a^b \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} U^\top PU & M \\ M^\top & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix} dt,$$

wobei $M = U^\top(P\dot{U} + RU)$ und $N = \dot{U}^\top(P\dot{U} + RU) + U^\top(R^\top\dot{U} + QU)$.
Aus $(*)$ folgt $\dot{M} = N$. Außerdem,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M - M^\top) &= \dot{U}^\top(P\dot{U} + RU) - (P\dot{U} + RU)^\top\dot{U} + U^\top\frac{d}{dt}(P\dot{U} + RU) - \frac{d}{dt}(P\dot{U} + RU)^\top U \\ &= \dot{U}^\top RU - U^\top R^\top\dot{U} + U^\top(R^\top\dot{U} + Q\,U) - (R^\top\dot{U} + Q\,U)^\top U = 0. \end{aligned}$$

Weil $U(a) = 0$ folgt $M(t)^\top = M(t)$ für alle t. Also

$$\delta^2 J(x,\, Uw\,) = \int_a^b \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} U^\top PU & M \\ M & \dot{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ w \end{bmatrix} dt = \int_a^b \dot{w}^\top U^\top PU\dot{w} + \frac{d}{dt}(w^\top Mw)\,dt.$$

Die Randwerte von $w^\top Mw$ sind 0. □

Beweis des Jacobi-Satzes II

Lemma (noch einmal): Sei $P(t)$ positiv definit für alle t und sei $U : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ die Lösung des Jacobischen Anfangswertproblems (2. Ordnung)

$$\frac{d}{dt}(P\dot{U} + RU) = R^\top \dot{U} + Q\,U, \qquad U(a) = 0, \quad \dot{U}(a) = I. \qquad (*)$$

Dann gilt für alle $h = Uw$, $w \in \mathcal{PC}_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$:

$$\int_a^b \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}P(t) & R(t)\\ R(t)^\top & Q(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix} dt = \int_a^b (U\dot{w})^\top P(U\dot{w})\,dt \geq 0.$$

Angenommen, es existiert kein konjugierter Punkt a_* in $[a,b]$. Dann ist $\det(U(t)) \neq 0$ für alle $[a,b]$. Wenn wir nun in der Jacobi-DGL P durch $P-\gamma\,I$ ersetzen, gilt für die zugehörige Lösung U_γ des Anfangswertproblems wegen Stetigkeit immer noch $\det(U_\gamma(t)) \neq 0$ für alle $[a,b]$. Daher ist die Gleichung

$$h(t) = U_\gamma(t)w(t)$$

für jedes $h \in \mathcal{PC}_0^1$ lösbar. Mit dem Lemma folgt

$$\begin{aligned}\delta^2 J(x,\,h\,) - \gamma\,\|\dot{h}\|_2^2 &= \int_a^b \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}P(t)-\gamma\,I & R(t)\\ R(t)^\top & Q(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}(t)\\ h(t)\end{bmatrix} dt,\\ &= \int_a^b (U_\gamma\dot{w})^\top (P-\gamma\,I)(U_\gamma\dot{w})\,dt \geq 0.\end{aligned}$$

Somit ist $\delta^2 J(x,\,\cdot)$ gleichmäßig positiv definit und das hinreichende Jacobi-Kriterium bewiesen.

Beweis des Jacobi-Satzes III

Wir beweisen das notwendige Kriterium von Jacobi. Erinnerung:

$$q(h) := \delta^2 J(x,h) = \int_a^b \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(t) & R(t) \\ R(t)^\top & Q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ h(t) \end{bmatrix} dt = \int_a^b (U\dot{w})^\top P(U\dot{w})\, dt \geq 0. \qquad (**)$$

Sei a_* ein konjugierter Punkt in $[a,b)$. Dann gibt es einen Vektor $w_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ so dass $U(a_*)w_0 = 0$. Nun sei $h \in \mathcal{PC}_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$h(t) = \begin{cases} U(t)w_0 & \text{für } t \in [a,a_*], \\ 0 & \text{für } t \in (a_*,b]. \end{cases}$$

Wegen $(**)$ ist $q(h) = 0$. Wir konstruieren eine Variation ξ von h so dass $\delta q(h,\xi) < 0$. Dann ist $q(h+\epsilon\xi) < 0$ für hinreichend kleine ϵ. Letzteres bedeutet, dass die 2. Variation von J an der Stelle x nicht positiv semidefinit ist. Damit ist x kein Minimierer. Aus der Definition von U folgt für h,

$$\frac{d}{dt}(P\dot{h} + Rh) = R^\top \dot{h} + Qh, \qquad h(a) = 0, \qquad \dot{h}(a) = w_0 \neq 0.$$

Weil $h(a_*) = 0$ ist $\dot{h}(a_*) \neq 0$. Anderenfalls wäre h die Nullfunktion (wegen Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems). Sei $\xi \in \mathcal{PC}_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a_*) = -\dot{h}(a_*)$ und $\xi(t) = 0$ für $t \leq a_* - \epsilon$. Dann

$$\begin{aligned} \delta q(h,\xi) &= 2\int_{a_*-\epsilon}^{a_*} \dot{\xi}^\top(P\dot{h} + Rh) + \xi^\top(Qh + R^\top\dot{h})\, dt \\ &= 2\,\xi^\top(P\dot{h} + Rh)\big|_{a_*-\epsilon}^{a_*} + 2\int_{a_*-\epsilon}^{a_*} -\xi^\top \frac{d}{dt}(P\dot{h} + Rh) + \xi^\top(Qh + R^\top\dot{h})\, dt \\ &= 2\xi(a_*)^\top P(a_*)\dot{h}(a_*) = -2\dot{h}(a_*)^\top P(a_*)\dot{h}(a_*) < 0. \end{aligned}$$

Mechanik-Beispiel zu Jacobi

Seien $M, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Funktional:	$J(x) = \frac{1}{2}\int_0^T \dot{x}^\top M\dot{x} - x^\top S x \, dt$
1. Variation:	$\delta J(x,h) = \int_0^T \dot{x}^\top M\dot{h} - x^\top S h \, dt$
2. Variation:	$\delta^2 J(x,h) = \int_0^T \dot{h}^\top M\dot{h} - h^\top S h \, dt = \int_0^T \begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix} dt$
	(hängt in diesem Beispiel nicht von x ab)
E.L.-Gleichung:	$M\ddot{x} = -Sx$
Jacobi-AWP:	$M\ddot{U} = -SU, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = I$

Man kann zeigen, dass die Matrix $A = M^{-1}S$ eine Basis von Eigenvektoren $V = [v_1\ v_2\ \ldots v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit positiven Eigenwerten $\omega_1^2 \geq \omega_2^2 \geq \ldots \geq \omega_n^2$ hat. Sei

$$U(t) \;=\; V \,\mathrm{diag}\left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1},\ \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2},\ \ldots\ ,\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) V^{-1}.$$

- Die Lösungen der E.L-Gleichung (Extremalen) sind

  $$x = \dot{U}\, x(0) + U\, \dot{x}(0), \qquad x(0), \dot{x}(0) \text{ beliebig.}$$

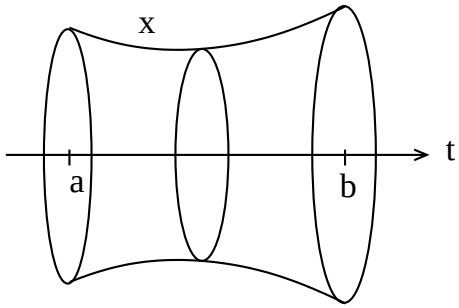
- U löst das Jacobische Anfangwertproblem.
- Der erste zu 0 konjugierte Punkt ist $\frac{\pi}{\omega_1}$.
- Jacobi: Wenn $T < \frac{\pi}{\omega_1}$ dann ist jede Extremale lokaler Minimierer zu den jeweiligen Randwerten $x(0)$, $x(T)$.

  Wenn $\frac{\pi}{\omega_1} < T$, dann ist keine Extremale Minimierer.

Minimale Oberfläche eines Rotationskörpers I

Der Flächeninhalt der Mantelfläche eines Rotationskörpers um die t-Achse mit Querschnittsradius $x(t) > 0$ ist $2\pi\, J(x)$, wobei

$$J(x) = \int_a^b x(t)\,\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,dt$$



Vorgegeben seien $x(a) = A$, $x(b) = B$, $A, B > 0$.

2. Euler-Lagrange-Gleichung ergibt:

$$c = f - f_{\dot{x}}\,\dot{x} = x\,\sqrt{1+\dot{x}^2} - \frac{x\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c\,\cosh\left(\frac{t}{c} + d\right), \qquad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird benutzt, dass $\cosh'(z) = \sinh(z)$, $1 + \sinh(z)^2 = \cosh(z)^2$.

Die Konstanten c, d müssen an die Randbedingungen angepasst werden. Dies ist nicht immer möglich. Auf den folgenden Seiten diskutieren wir den Fall, dass $A = B$. Das Integrationsintervall $[a, b]$ wird als $[-a, a]$ gewählt. Dann ist $d = 0$.

Minimale Oberfläche eines Rotationskörpers II

Minimierungsproblem:

$$J(x) = \int_{-a}^{a} x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,dt, \qquad x(-a) = x(a) = A.$$

Extremalen: $x(t) = c\cosh(t/c)$.

Randbedingungen: $A = c\cosh(\pm a/c) = c\cosh(a/c)$.

Umformuliert: $\frac{A}{a} = \frac{\cosh(a/c)}{a/c} = \frac{\cosh(z)}{z}, \qquad z := a/c.\ (*)$

Die Funktion $z \longmapsto \phi(z) = \frac{\cosh(z)}{z}$ hat das Minimum $\sinh(z_0)$ wobei $z_0\tanh(z_0) = 1$.

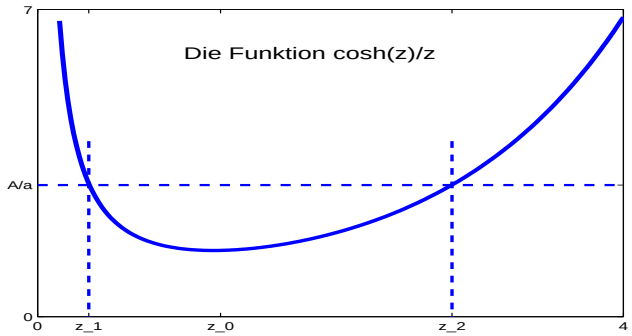
Wenn $\frac{A}{a} < \sinh(z_0)$, dann hat $(*)$ keine Lösung z.

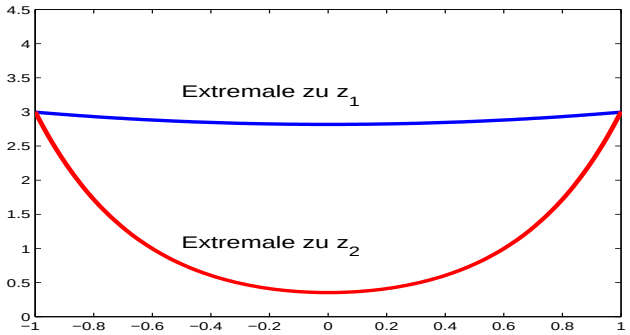
Wenn $\frac{A}{a} > \sinh(z_0)$, dann hat $(*)$ zwei Lösungen z_1, z_2.

Im letzteren Fall gibt es 2 Extremalen, welche die Randbedingungen erfüllen.

Frage: Welche ist ein lokaler Minimierer?

Die Anwort gibt das Jacobi-Kriterium. (Nächste Seite)





Minimale Oberfläche eines Rotationskörpers III

Minimierungsproblem:

$$J(x) = \int_{-a}^{a} x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,dt, \qquad x(-a) = x(a) = A.$$

Extremalen: $x(t) = c\cosh(x/c)$. **2. Variation:**

$$\delta^2 J(x,h) = \int_{-a}^{a} \begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} f_{\dot{x}\dot{x}} & f_{\dot{x}x} \\ f_{x\dot{x}} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix} dt = \int_{-a}^{a} \begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{c}{\cosh(t/c)^2} & \tanh(t/c) \\ \tanh(t/c) & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{h}\\ h\end{bmatrix} dt$$

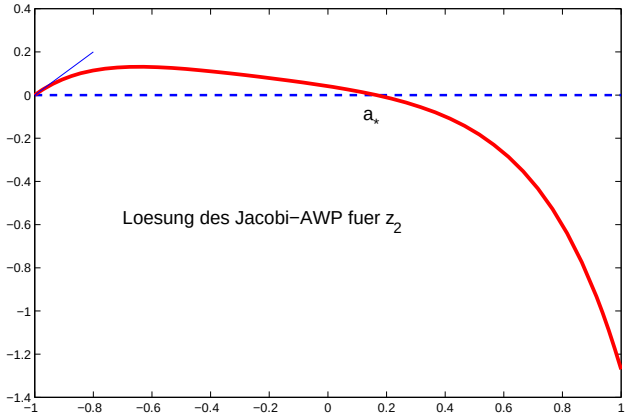
Jacobi-Anfangswertproblem:

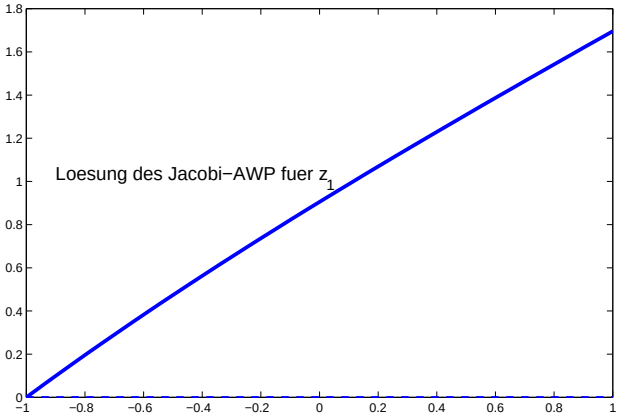
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\cosh(t/c)^2}\,\dot{u} + \tanh(t/c)\right) = \tanh(t/c)\,\dot{u}, \qquad u(-a) = 0, \quad \dot{u}(-a) = 1.$$

Umgestellt:

$$\ddot{u} = 2\frac{\tanh(t/c)}{c}\,\dot{u} - u/c^2$$

Numerische Lösung für die beiden Extremalen, die die Randbediingungen erfüllen:





Für die untere Extremale existiert ein konjugierter Punkt im Intervall $(-a, a]$, für die obere nicht $\Rightarrow$ die obere Extremale ist lokaler Minimierer, die untere nicht.