

# Differentialgleichungen für Ingenieure

## WS 06/07

7. Vorlesung

Michael Karow

**Themen heute:**

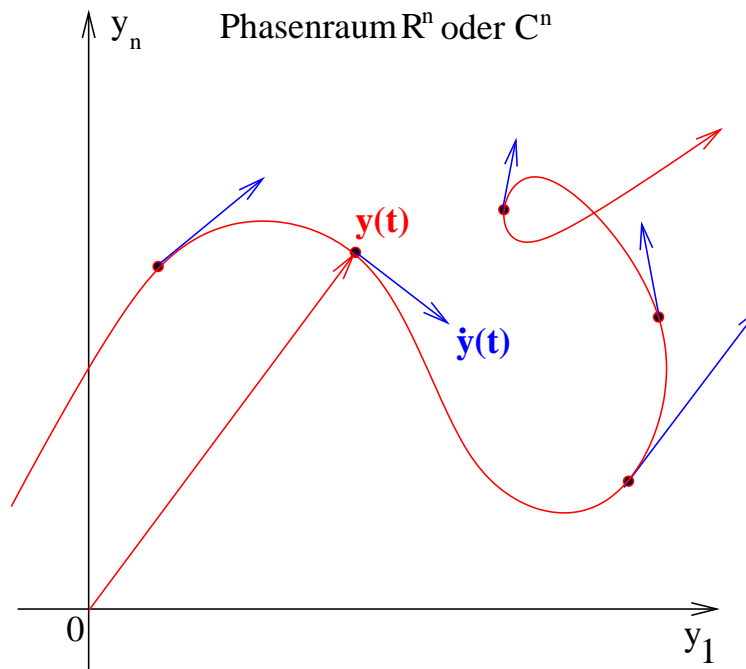
1. Die rechte Seite einer DGL als Vektorfeld.
2. Stabilität

## Die Ableitung einer Kurve

Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine differenzierbare Kurve. Die Ableitung

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix}$$

interpretiert man als Vektor, der am Punkt  $\mathbf{y}(t)$  angeheftet ist.



Häufige physikalische Interpretation: Kurve  $\mathbf{y}(\cdot)$  = Bahn eines Massenpunktes  
 $\mathbf{y}(t)$  = Ort des Massenpunktes zu Zeit  $t$   
 $\dot{\mathbf{y}}(t)$  = Geschwindigkeit zur Zeit  $t$

Allgemeiner:  $\mathbf{y}(t)$  = Zustand eines physikalischen Systems

## Interpretation der rechten Seite einer DGL als Vektorfeld

DGL:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

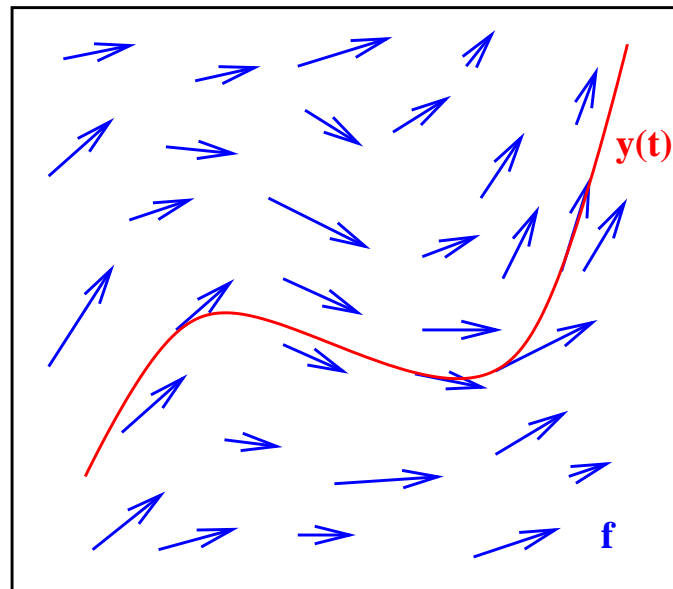
↑  
Geschwindigkeitsvektor  
der Lösung  $\mathbf{y}(t)$

↑  
Am Ort  $\mathbf{y}(t)$  und zur Zeit  $t$   
vorgegebener Vektor  $\mathbf{f}$

**Terminologie:** Eine DGL heisst **autonom**, falls  $\mathbf{f}$  nicht von  $t$  abhängt.

Also:  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$

Veranschaulichung der Situation im autonomen Fall:



# Gleichgewichtspunkte

**Definition:** Ein Punkt  $\mathbf{y}_* \in \mathbb{C}^n$  heisst Gleichgewichtspunkt (stationärer Punkt) des Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  bzw. der autonomen Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ , falls

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_*) = \mathbf{0}.$$

Mit anderen Worten:

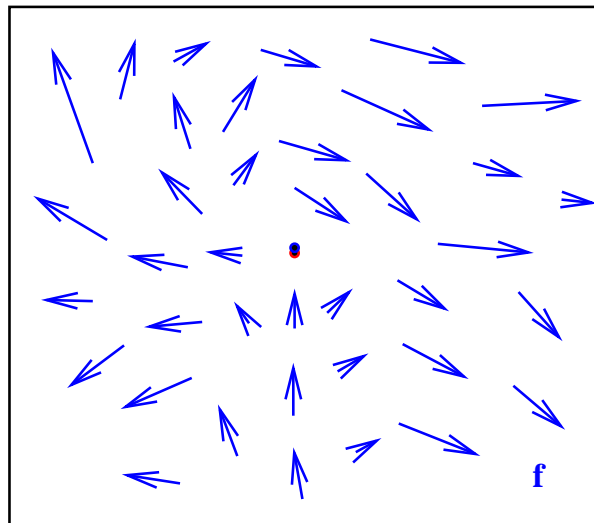
Ein Gleichgewichtspunkt ist eine Nullstelle der rechten Seite der DGL (d.h. des Vektorfeldes).

**Tatsache:** Wenn  $\mathbf{y}_*$  ein Gleichgewichtspunkt ist, dann hat das AWP

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_*$$

die konstante Lösung  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}_*$ .

**Bild:** Ein Gleichgewichtspunkt mit konstanter Lösung (rot).



# Beispiel: Volterra-Lotka-Gleichungen

Die Volterra-Lotka-Gleichungen lauten:

$$\dot{x} = a x - b x y, \quad \dot{y} = c x y - d y, \quad a, b, c, d > 0.$$

In Vektorschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a x - b x y \\ c x y - d y \end{bmatrix}}_{=f(x,y)}.$$

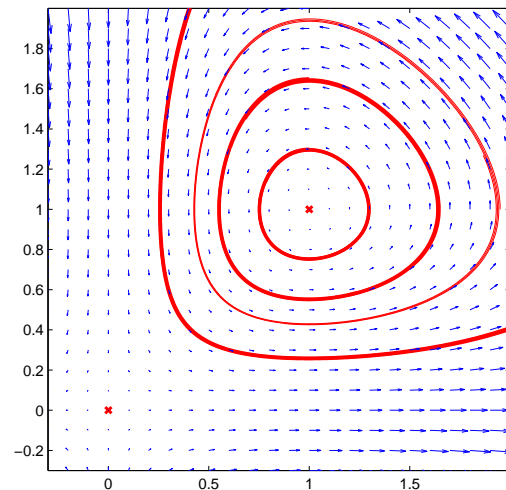
Interpretation:  $x$ =Anzahl Beutetiere,  $y$ =Anzahl Räuber (siehe Skript)

Gleichgewichtspunkte sind diejenigen Punkte  $(x, y)$ , für die gilt

$$a x - b x y = 0,$$

$$c x y - d y = 0.$$

Eine kurze Rechnung ergibt, dass  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(x, y) = (d/c, a/b)$  die einzigen Gleichgewichtspunkte sind. Das Phasendiagramm sieht folgendermaßen aus:



## Gleichgewichtspunkte bei homogenen linearen DGL

Die Gleichgewichtspunkte einer homogene lineare DGL

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t)$$

sind diejenigen Vektoren  $\mathbf{y}_*$ , für die gilt:

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_* = \mathbf{0}.$$

Diese Vektoren bilden einen Vektorraum: den Kern von  $\mathbf{A}$  (siehe Lin. Alg. Vorlesung). Dies ist auch der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

Es gilt:

1. Der Nullpunkt  $\mathbf{y}_* = \mathbf{0}$  ist stets ein Gleichgewichtspunkt.
2. Wenn  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , dann ist der Nullpunkt auch der einzige Gleichgewichtspunkt.

## Phasenporträts für lineare DGL im $\mathbb{R}^2$

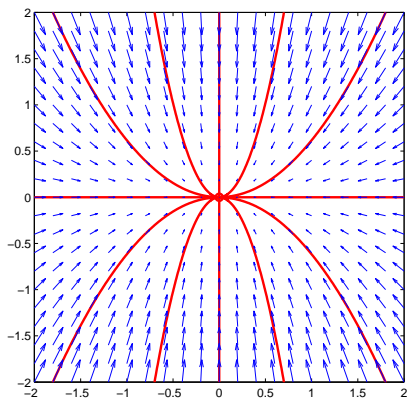
Die Bilder unten zeigen die Vektorfelder (blau) und einige Lösungskurven (rot) für DGL vom Typ

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

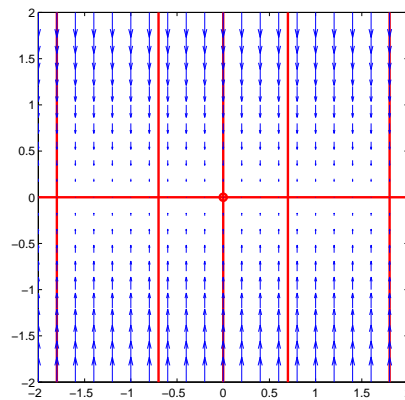
Die Lösungen sind die Kurven

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

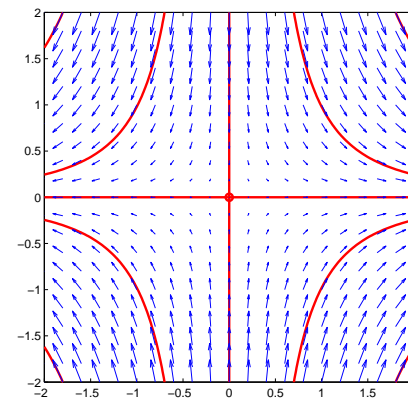
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$



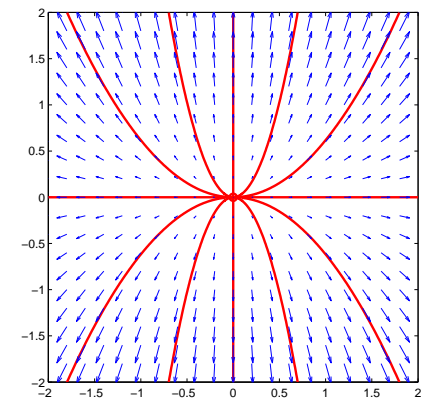
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$$



$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$



$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$



## Phasenporträts für lineare DGL im $\mathbb{R}^2$

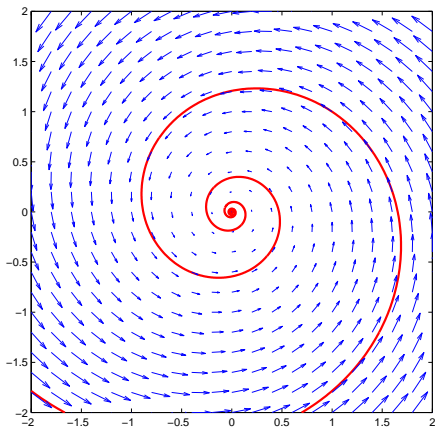
Die Bilder unten zeigen die Vektorfelder (blau) und einige Lösungskurven (rot) für DGL vom Typ

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

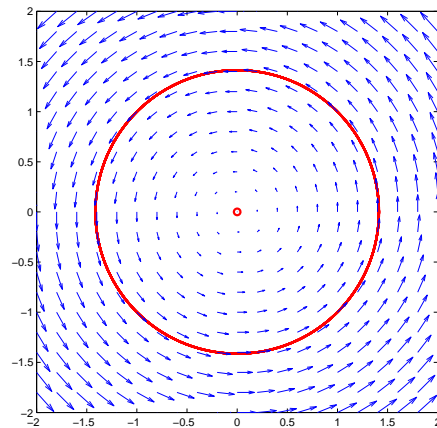
Die Eigenwerte der Matrix sind  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ . Die reellen Lösungen sind die Kurven

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

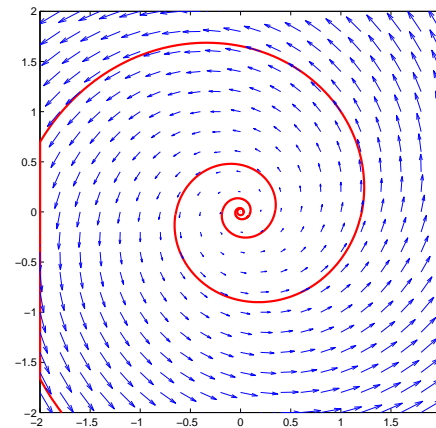
$\alpha = -0.2, \omega = 1$



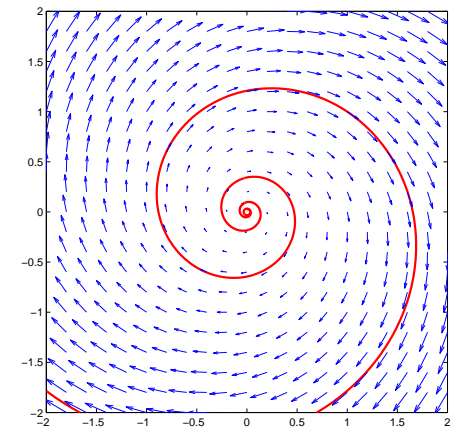
$\alpha = 0, \omega = 1$



$\alpha = 0.2, \omega = 1$



$\alpha = 0.2, \omega = -1$





# Phasenporträts für lineare DGL im $\mathbb{R}^2$

Die Bilder unten zeigen die Vektorfelder (blau) und einige Lösungskurven (rot) für DGL vom Typ

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

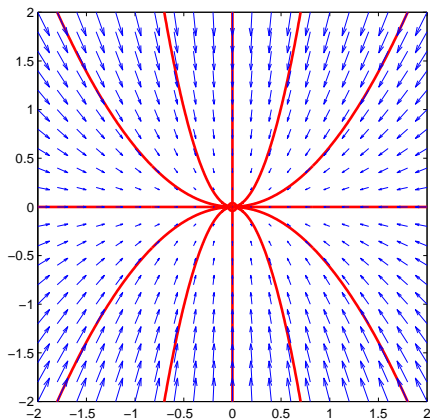
Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind  $\lambda_1, \lambda_2$ . Die Eigenvektoren sind die Spalten  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  von  $\mathbf{V}$ . In den Bildern:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

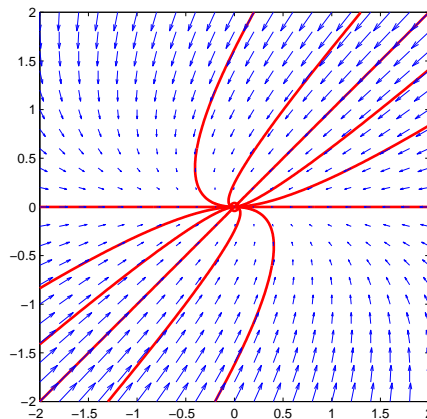
Die Lösungen sind die Kurven

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

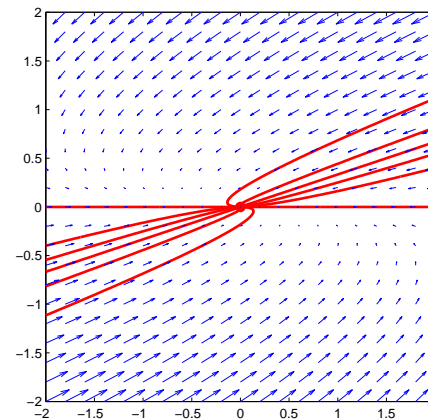
$x = 0$



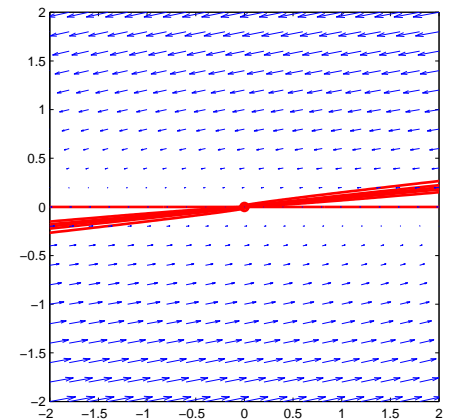
$x = 1$



$x = 3$



$x = 10$



## Phasenporträts für lineare DGL im $\mathbb{R}^2$

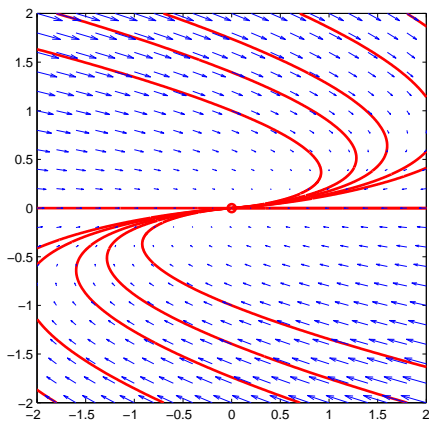
Die Bilder unten zeigen die Vektorfelder (blau) und einige Lösungskurven (rot) für DGL vom Typ (Jordanblock)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

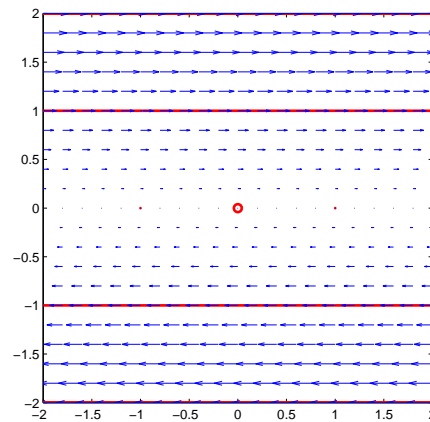
Der einzige Eigenwert ist  $\lambda$ . Die Lösungen sind die Kurven

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

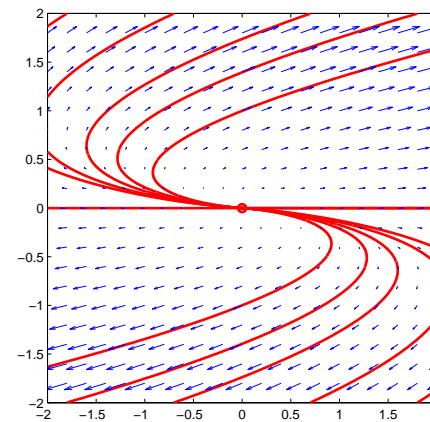
$\lambda = -0.4$



$\lambda = 0$



$\lambda = 0.4$



# Stabilität

Im folgenden ist  $\mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^n$  ein Gleichgewichtspunkt der autonomen DGL

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)), \quad (*)$$

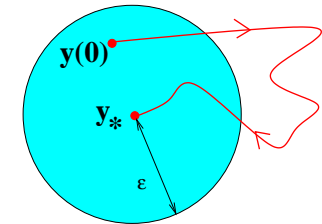
d.h. es ist  $\mathbf{f}(\mathbf{y}_*) = 0$ .

## Definition:

1.  $\mathbf{y}_*$  heisst **attraktiv**, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass jede Lösung von (\*), die in der  $\epsilon$ -Umgebung von  $\mathbf{y}_*$  startet, gegen  $\mathbf{y}_*$  konvergiert.

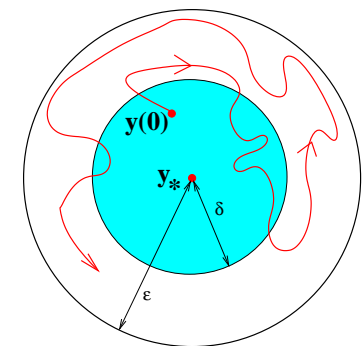
Formal:

$$|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_*| < \epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_*.$$



2.  $\mathbf{y}_*$  heisst **stabil**, wenn gilt: Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass alle Lösungskurven, die in der  $\delta$ -Umgebung von  $\mathbf{y}_*$  starten, die  $\epsilon$ -Umgebung von  $\mathbf{y}_*$  niemals verlassen. Formal:

$$|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_*| < \delta \Rightarrow |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_*| < \epsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$



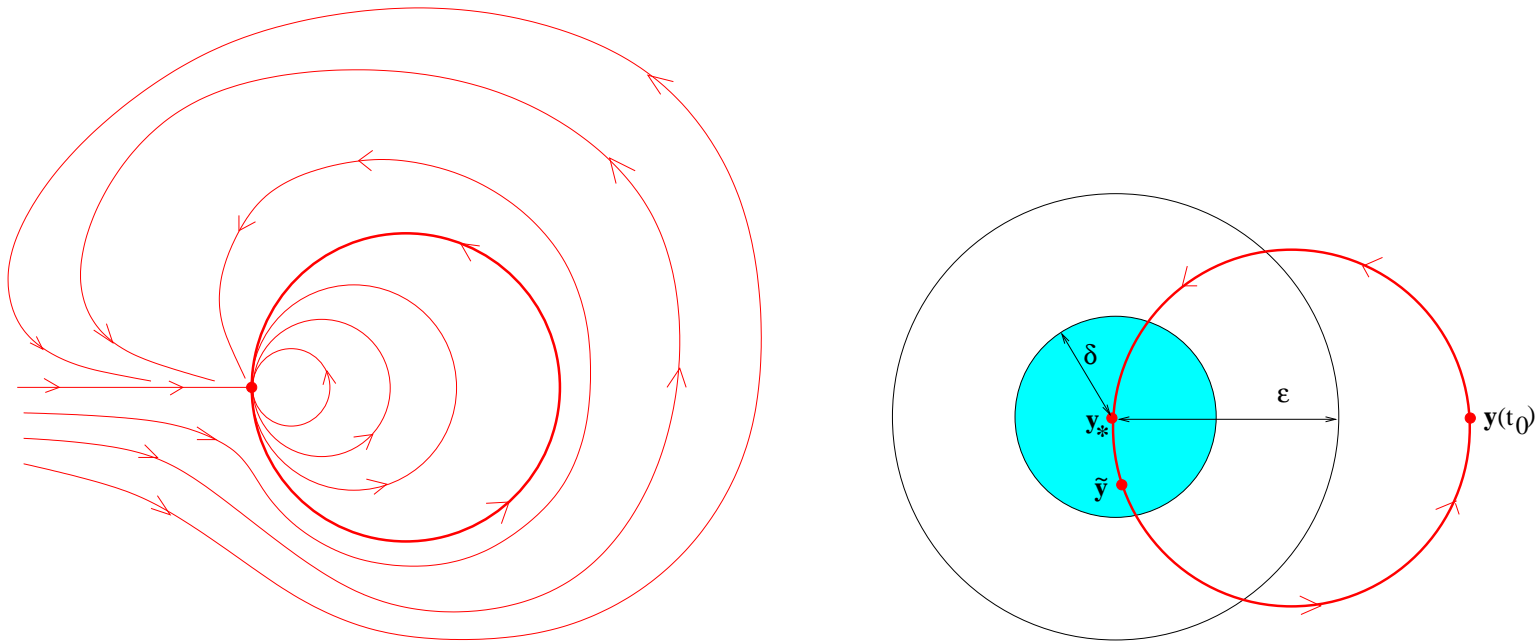
3.  $\mathbf{y}_*$  heisst **asymptotisch stabil**, wenn  $\mathbf{y}_*$  stabil und attraktiv ist.

# Beispiel eines attraktiven aber nicht stabilen Gleichgewichtspunkts

Wenn eine Lösungskurve  $y(t)$  existiert, so dass

$$y(t_0) \neq y_*, \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_*,$$

dann kann der Gleichgewichtspunkt  $y_*$  nicht stabil sein.  
Er kann aber trotzdem attraktiv sein.



## Begründung für die Instabilität:

Wähle  $\epsilon$  so klein ist, dass der Punkt  $y(t_0)$  nicht in der  $\epsilon$ -Umgebung enthalten ist. Wegen  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_*$  gibt es zu jedem noch so kleinen  $\delta > 0$  einen Punkt  $\tilde{y} = y(t)$ ,  $t < t_0$ , der in der  $\delta$ -Umgebung von  $y_*$  enthalten ist. Wähle  $\tilde{y}$  als Anfangswert. Die Lösung zu diesem Anfangswert erreicht zu einer positiven Zeit den Punkt  $y(t_0)$ .

# Stabilitätskriterium für homogene lineare DGL

Der Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{y}_* = \mathbf{0}$  der homogenen linearen DGL

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t)$$

ist genau dann

1. **asymptotisch stabil**, wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  negativen Realteil haben.
2. **stabil**, wenn
  - kein Eigenwert positiven Realteil hat, und
  - es zu allen rein imaginären Eigenwerten der algebraischen Vielfachheit  $k$  auch  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren gibt (d.h. zu diesen Eigenwerten hat man keine echten Hauptvektorenlösungen der DGL).

**Begründung:** Alle Lösungen der DGL sind Linearkombinationen der Basislösungen

1.  $e^{(\alpha+i\omega)t} \mathbf{v}$  (Eigenvektorenlösungen)
2.  $e^{(\alpha+i\omega)t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^j \mathbf{v}$  (echte Hauptvektorenlösungen,  $k > 1$ )

wobei  $\lambda = \alpha + i\omega$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  ist.

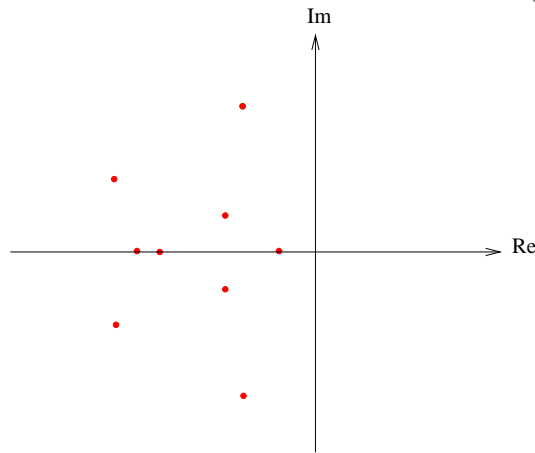
$\alpha > 0 \Rightarrow$  exponentielles Wachstum

$\alpha < 0 \Rightarrow$  exponentielles Schrumpfen

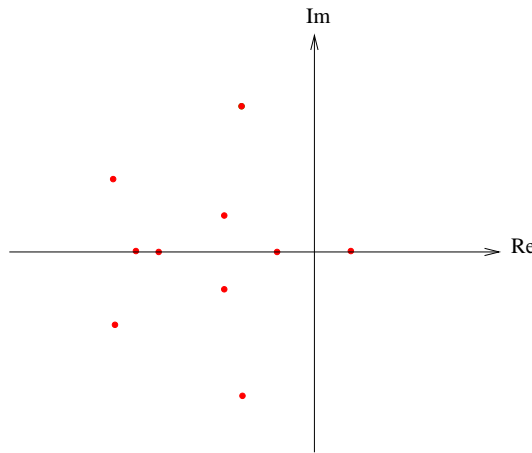
$\alpha = 0 \Rightarrow$  reine Rotation im 1. Fall, polynomiales Wachstum im 2. Fall

# Veranschaulichung des Stabilitätskriteriums für lineare DGL

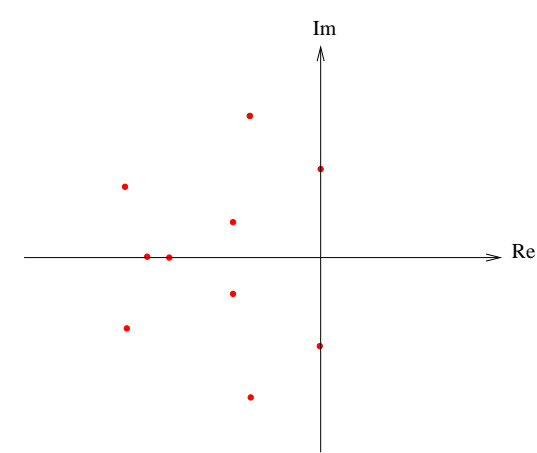
Die folgenden Diagramme zeigen Beispiele für Eigenwertverteilungen reeller Matrizen.



Alle Eigenwerte in der linken Halbebene.  
⇒ asympt. Stabilität



Ein oder mehrere Eigenwerte in der rechten Halbebene.  
⇒ Instabilität



Kein Eigenwert in der rechten Halbebene, einige EW auf der imag. Achse.

Wenn imag. EW alle einfach  
⇒ Stabilität.

Wenn ein imag. EW mit höherer Vielfachheit  $k$   
⇒ Existenz von  $k$  linear unabhängigen Eigenvektoren prüfen

## Einschub:

### Was bedeutet Stabilität eines homogenen linearen Systems für das zugehörige inhomogene System?

Seien  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  Lösungen der inhomogenen DGL

$$\dot{y}(t) = A y(t) + b(t).$$

Dann ist die Differenz  $y_1(t) - y_2(t)$  eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Daraus ergibt sich unmittelbar folgendes:

- Wenn  $0$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt der homogenen DGL ist, dann gibt es eine (von  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  unabhängige) Konstante  $C$ , so dass

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq C |y_1(0) - y_2(0)|$$

für alle  $t$ .

D.h. die Lösungen können sich nicht beliebig weit voneinander entfernen.

- Wenn  $0$  sogar ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt der homogenen DGL ist, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1(t) - y_2(t)) = 0.$$

D.h. alle Lösungen der inhomogenen DGL konvergieren gegeneinander.

# Linearisierung einer DGL um einen Gleichgewichtspunkt

Sei  $\mathbf{y}_*$  ein Gleichgewichtspunkt der DGL

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (*).$$

Die Taylorentwicklung von  $\mathbf{f}$  um  $\mathbf{y}_*$  bis zur ersten Ordnung ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{y}_*)}_{=0} + \mathbf{f}'(\mathbf{y}_*) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_*) + \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*)}_{\text{Restglied}}, \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_*} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*)}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_*|} = \mathbf{0}, \quad (**).$$

Dabei ist

$$\mathbf{f}'(\mathbf{y}_*) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(\mathbf{y}_*), \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_n}(\mathbf{y}_*) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}_*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}_*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}_*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}_*) \end{bmatrix}$$

die **Jacobi-Matrix** von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{y}_*$ .

Weglassen des Restgliedes in (\*\*) ergibt die linearisierte DGL

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}'(\mathbf{y}_*) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_*) \quad (***)$$

Für die Abweichung von  $\mathbf{y}_*$ , also die Größe  $\mathbf{y}_a := \mathbf{y} - \mathbf{y}_*$ , gilt  $\dot{\mathbf{y}}_a = \frac{d}{dt}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_*) = \dot{\mathbf{y}}$ . Dies in (\*\*\*) eingesetzt ergibt die lineare homogene DGL

$$\dot{\mathbf{y}}_a = \mathbf{f}'(\mathbf{y}_*) \mathbf{y}_a.$$

## Stabilitätssatz für nichtlineare Systeme:

1. Wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{f}'(\mathbf{y}_*)$  negativen Realteil haben, dann ist  $\mathbf{y}_*$  ein **asymptotisch stabiler** Gleichgewichtspunkt von (\*).
2. Wenn ein Eigenwert von  $\mathbf{f}'(\mathbf{y}_*)$  positiven Realteil hat, dann ist  $\mathbf{y}_*$  ein **instabiler** Gleichgewichtspunkt von (\*).



## Beispiel:

# Linearer Stabilitätstest bei den Volterra-Lotka-Gleichungen

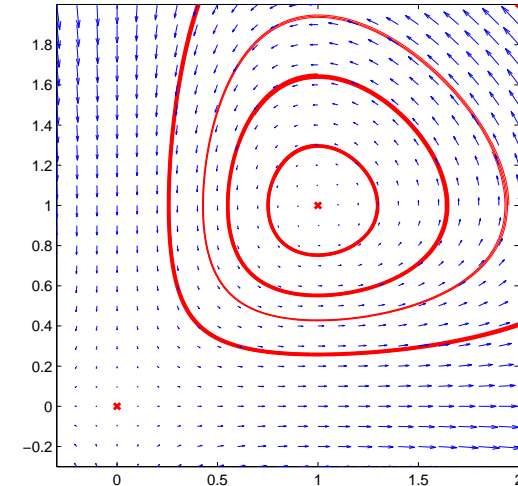
Die Volterra-Lotka-Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a x - b x y \\ c x y - d y \end{bmatrix}}_{=f(x,y)}, \quad a, b, c, d > 0.$$

Jacobi-Matrix von  $f$ :

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} a - b y & -b x \\ c y & c x - d \end{bmatrix}.$$

Gleichgewichtspunkte:  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix}$ .



Gleichgewichtsp.	Jacobi-Matrix	Eigenwerte	Stabilitätsaussage aufgrund der Eigenwerte
$\mathbf{y}_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$	$a, -d$	instabil
$\mathbf{y}_* = \begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -bd/c \\ ca/b & 0 \end{bmatrix}$	$\pm i \sqrt{ad}$	keine Aussage

**Fazit:** Der lineare Stabilitätstest versagt beim Nachweis der Stabilität des Gleichgewichtspunkts  $\begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix}$  für das Volterra-Lotka-System, denn beide Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $f'(d/c, a/b)$  sind rein imaginär.

Auf den folgenden Seiten wird beschrieben, wie man die Stabilität dieses Gleichgewichtspunktes mit anderen Mitteln nachweisen kann.

Die dazu nötigen Schritte lassen sich verallgemeinern und man erhält so das

**Stabilitätskriterium von Ljapunoff.**

## Nachweis der Stabilität des Gleichgewichtspunkts $(d/c, a/b)$ . 1. Schritt:

Wir definieren eine Funktion  $E : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$E(x, y) := cx - d \ln(x) + by - a \ln(y).$$

Die partiellen Ableitungen von  $E$  sind

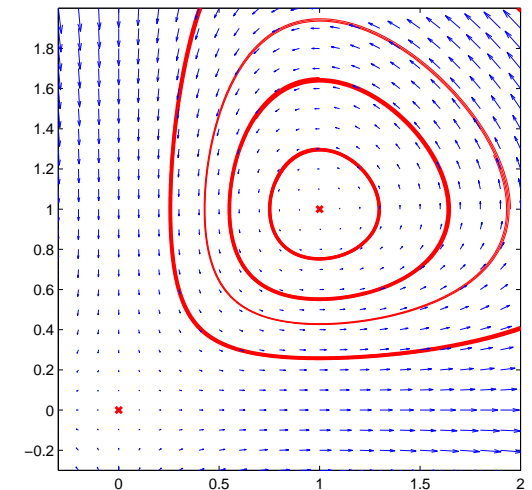
$$\frac{\partial E}{\partial x} = c - d/x, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = b - a/y.$$

Für eine Lösung  $(x(t), y(t))$  des Volterra-Lotka-Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{bmatrix}}_{=f(x,y)} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} && \text{(Kettenregel)} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial E}{\partial y} f_2(x, y) \\ &= (c - d/x)(ax - bxy) + (b - a/y)(cxy - dy) \\ &= 0. \end{aligned}$$



**Folgerung:** Der Wert von  $E$  ist konstant entlang der Lösungskurven.

## Nachweis der Stabilität des Gleichgewichtspunkts $(d/c, a/b)$ . 2. Schritt:

### Behauptung:

Die Funktion  $E$  hat an der Stelle  $(d/c, a/b)$  ein isoliertes lokales Minimum.

Um die Behauptung zu bestätigen, berechnet man zunächst den Gradienten und die Hesse-Matrix von  $E$ :

$$\nabla E(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - d/x \\ b - a/y \end{bmatrix}, \quad (\text{Hess } E)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{bmatrix}$$

Wenn an einem Punkt  $(x, y)$  der Gradient verschwindet und die Hesse-Matrix positiv definit ist, dann liegt dort ein isoliertes lokales Minimum vor (siehe Analysis 2).

Dies ist für den Punkt  $(x, y) = (d/c, a/b)$  der Fall, denn

$$\nabla E(d/c, a/b) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Hess } E)(d/c, a/b) = \begin{bmatrix} c^2/d & 0 \\ 0 & b^2/a \end{bmatrix}.$$

### Nachweis der Stabilität des Gleichgewichtspunkts $(d/c, a/b)$ . 3. Schritt:

Sei  $m_0$  der Wert des isolierten lokalen Minimums:  $m_0 := E(d/c, a/b)$ .

Sei nun ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Indem man  $\epsilon$  gegebenenfalls verkleinert kann man erreichen, dass die Funktion  $E$  auf dem Rand  $R$  der  $\epsilon$ -Umgebung des Gleichgewichtspunkts nur Werte annimmt, die größer als  $m_0$  sind. (Hier braucht man die Bedingung, dass das Minimum isoliert ist.) Man hat dann, dass

$$m_0 < m := \min_{(x,y) \in R} E(x,y)$$

Wegen der Stetigkeit von  $E$  folgt, dass für ein genügend kleines  $\delta > 0$  gilt:

$$E(x,y) < m \quad \text{für alle } (x,y) \text{ in der } \delta\text{-Umgebung des Gleichgewichtspunkts}$$

Nach Schritt 1 ist der Wert von  $E$  entlang der Lösungen der DGL konstant.

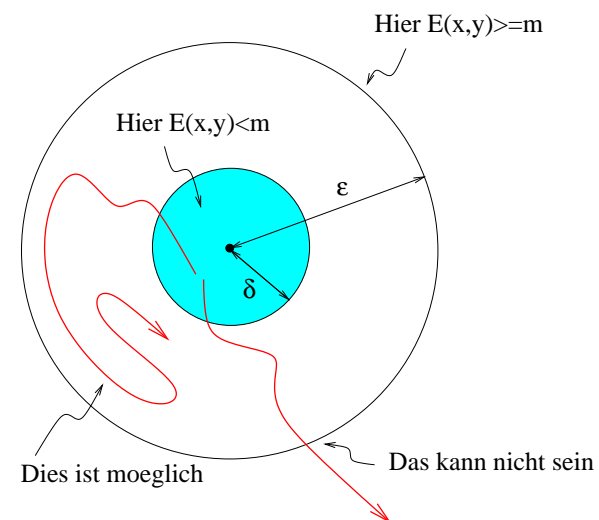
Folgerung: Eine Lösungskurve, die in der  $\delta$ -Umgebung startet (wo  $E < m$ ), kann den Rand der  $\epsilon$ -Umgebung (wo  $E \geq m$ ) nicht schneiden, und daher die  $\epsilon$ -Umgebung auch nicht verlassen.

⇒ Der Gleichgewichtspunkt ist stabil.

#### Bemerkung:

Die obige Argumentation funktioniert auch, falls der Wert von  $E$  entlang der Lösungen monoton fällt, wenn also

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) \leq 0.$$



## Verallgemeinerung von Schritt 1:

### Berechnung der Ableitung einer Funktion entlang der Lösung einer DGL

Gegeben sei eine autonome DGL

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \quad \text{kurz } \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (*)$$

Sei  $E = E(\mathbf{y})$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, auf dem sowohl  $E$  als auch  $\mathbf{f}$  definiert sind. Sei  $\mathbf{y}(t)$  eine Lösung von  $(*)$ .

Dann ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\mathbf{y}(t)) &= \frac{d}{dt} E(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ &= \frac{\partial E}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial E}{\partial y_n} \dot{y}_n \\ &= \frac{\partial E}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial E}{\partial y_n} f_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial y_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = (\nabla E \cdot \mathbf{f})(\mathbf{y}(t)). \end{aligned}$$

#### Folgerungen:

1. Wenn  $(\nabla E \cdot \mathbf{f})(\mathbf{y}) = 0$  für alle Punkte  $\mathbf{y} \in G$ , dann ist  $E$  konstant entlang jeder Lösung der DGL.
2. Wenn  $(\nabla E \cdot \mathbf{f})(\mathbf{y}) \leq 0$  ( $< 0$ ) für alle Punkte  $\mathbf{y} \in G$ , dann ist  $E$  entlang jeder Lösung der DGL (streng) monoton fallend.

**Terminologie:** Im Fall 1 nennt man  $E$  eine **Erhaltungsgröße** oder auch ein **erstes Integral** der DGL.

# Das Stabilitätskriterium von Ljapunoff

Sei  $\mathbf{y}_*$  ein Gleichgewichtspunkt der autonomen DGL  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ .

Sei  $E = E(\mathbf{y})$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, das  $\mathbf{y}_*$  enthält, und auf dem sowohl  $E$  als auch  $\mathbf{f}$  definiert sind.

Wenn gilt

(1)  $E$  nimmt an der Stelle  $\mathbf{y}_*$  ein isoliertes lokales Minimum an, d.h.

$$E(\mathbf{y}_*) < E(\mathbf{y}) \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ in einer } \epsilon\text{-Umgebung von } \mathbf{y}_*,$$

(2)  $(\nabla E \cdot \mathbf{f})(\mathbf{y}) \leq 0$ , für alle  $\mathbf{y} \in G$ ,

dann ist der Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{y}_*$  stabil.

Gilt in 2. sogar die strikte Ungleichung

(2')  $(\nabla E \cdot \mathbf{f})(\mathbf{y}) < 0$  für alle  $\mathbf{y} \in G$ ,

dann ist  $\mathbf{y}_*$  asymptotisch stabil.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918)



### **Schwierigkeit beim Anwenden von Ljapunoffs Stabilitätskriterium:**

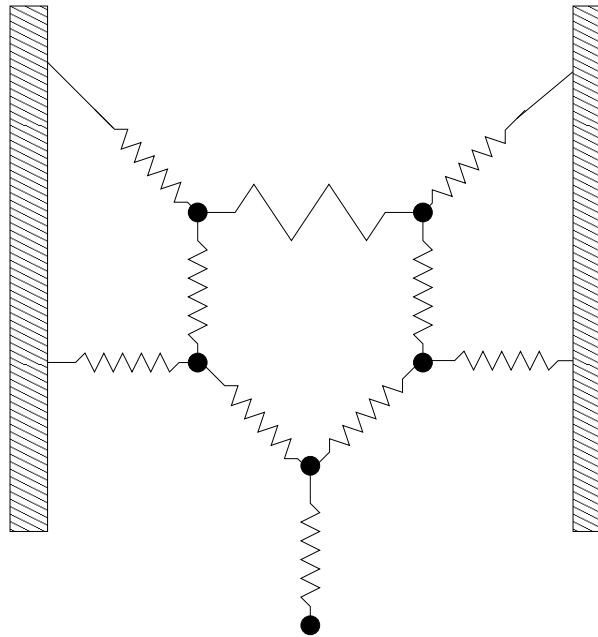
Um das Kriterium anwenden zu können, muss man zunächst eine geeignete Ljapunoff-Funktion  $E$  finden. Hierfür gibt es keine allgemeine Regel.

Bei mechanischen Systemen gibt es aber eine **natürliche Ljapunoff-Funktion: die Energie.**

Dies wird auf den folgenden Seiten am Beispiel eines Systems von Massenpunkten diskutiert.



## Beispiel: Massen in einem Federnetz



Wenn man die Massen aus der Gleichgewichtslage auslenkt, dann beginnt das Federnetz zu schwingen. Ist die Bewegung vollkommen Reibungs- und dämpfungsfrei, dann endet die Schwingung niemals. Bei vorhandener Reibung kehrt das System in die Gleichgewichtslage zurück und kommt dort zur Ruhe.

**In der dargestellten Gleichgewichtslage hat die Gesamtenergie ein lokales Minimum.**

Dabei ist in diesem und in vielen anderen Beispielen

$$E = \text{Gesamtenergie} = \text{kinetische Energie} + \underbrace{\text{potentielle Energie}}_{=U}$$

Die potentielle Energie  $U$  setzt sich zusammen aus der Höhenenergie (wegen der Schwerkraft) und der elastischen Energie, die in den Federn steckt.

Ein Minimum der Gesamtenergie liegt vor, wenn die kinetische Energie 0 ist (d.h. keine Bewegung), und die potentielle Energie ein Minimum annimmt.

## Energieerhaltung bei einer reibungsfreien Bewegung

Gegeben:

1. Massenpunkte mit Massen  $m_1, \dots, m_n$ , die sich an den Orten  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$  befinden.
2. Die potentielle Energie:  $U = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ .

Die Gesamtenergie ist

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{x}}_k^2 + U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad \text{wobei } \dot{\mathbf{x}}_k^2 = \dot{\mathbf{x}}_k \cdot \dot{\mathbf{x}}_k = |\dot{\mathbf{x}}_k|^2.$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung (reibungsfrei) für die Massenpunkte ist

$$\begin{bmatrix} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ m_n \ddot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \underbrace{-\nabla U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}_{\text{Kraft}}.$$

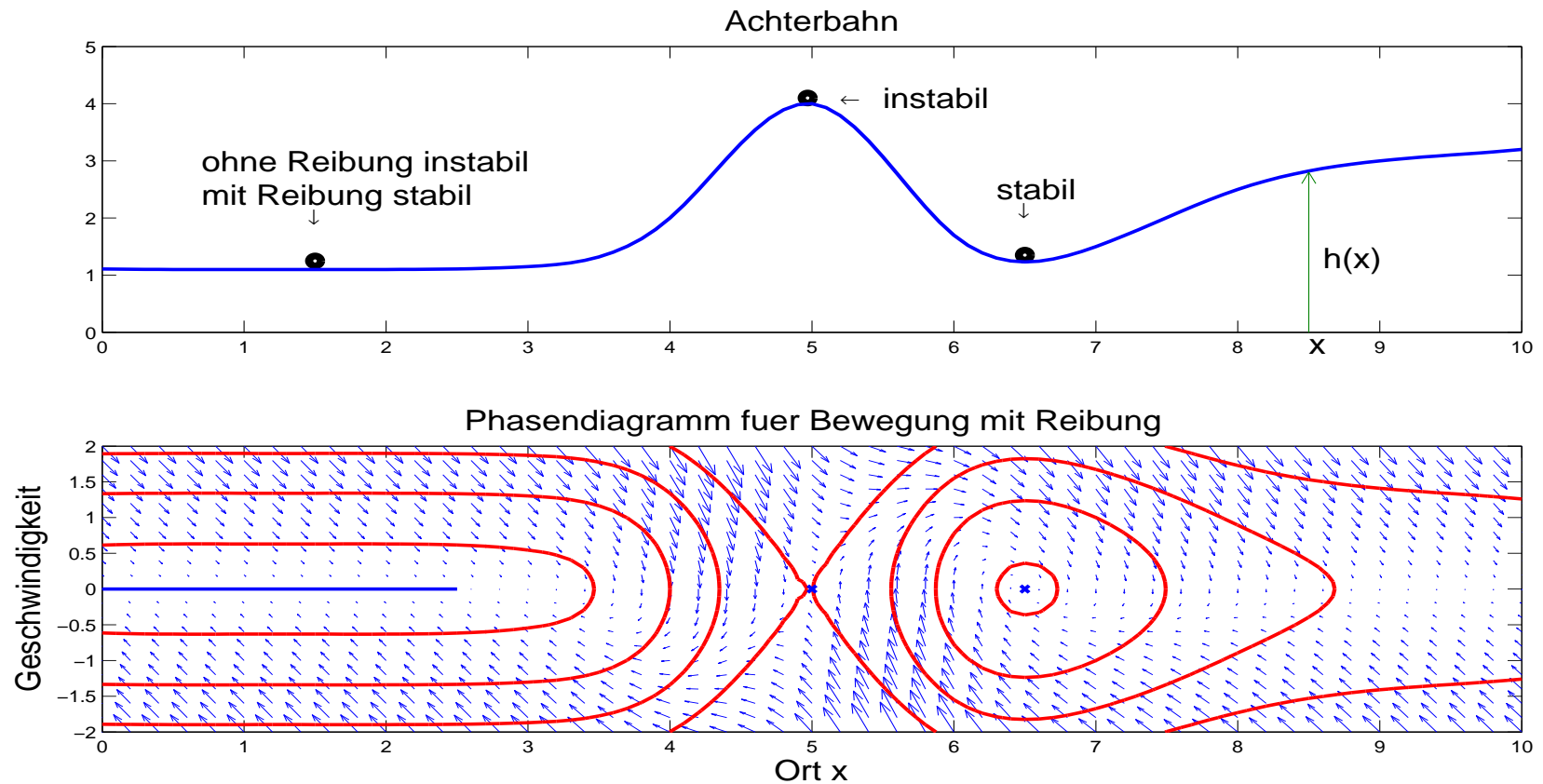
Ein Gleichgewichtspunkt liegt dort vor, wo  $\nabla U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 0$  (d.h. keine Kraft).

Für die Zeitableitung der Energie entlang einer Lösung der Bewegungsgleichung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{x}}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}_k + \nabla U \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ m_n \ddot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} + \nabla U \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} \\ &= -\nabla U \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} + \nabla U \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

⇒ **Die Energie ist während der Bewegung konstant.**

# 1-dimensionale Bewegung auf einer gekrümmten Bahn



DGL für die Bewegung auf der Bahn: 
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -g h'(x) + r(v)/m \end{bmatrix}$$

Dabei ist  $v$ =Geschwindigkeit,  $g$ =Fallbeschleunigung,  $m$ =Masse,  $r(v)$ =Reibung. Es ist stets  $v r(v) \leq 0$ ,  $r(0) = 0$ .

Die roten Kurven sind Niveaulinien der Energie  $E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + m g h(x)$ . Ohne Reibung (d.h. für  $r(v) = 0$ ) bewegt sich der Massenpunkt auf einer dieser Niveaulinien.

## Formaler Nachweis der Stabilität/ Instabilität bei der 1-dimensionalen Bewegung auf einer gekrümmten Bahn

Bewegungsgleichung als DGL 1. Ordnung: 
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -g h'(x) + r(v)/m \end{bmatrix}$$

**Gleichgewichtspunkte hat man für  $v = 0$ ,  $h'(x) = 0$ .**

**Wir betrachten nun die Gleichgewichtspunkte, für die  $h''(x) > 0$  gilt.**

An diesen Gleichgewichtspunkten hat die Gesamtenergie

$$E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + m g h(x)$$

ein isoliertes lokales Minimum.

(Zum formalen Nachweis davon zeigt man, dass  $\nabla E = 0$  und dass die Hesse-Matrix positiv definit ist).

Für die Ableitung der Energie entlang der Bewegung hat man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x, v) &= m v \dot{v} + m g h'(x) \dot{x} \\ &= m v (-g h'(x) + r(v)/m) + m g h'(x) v \\ &= r(v) v \leq 0 \quad (\text{Leistung der Reibungskraft}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Energie ist monoton fallend entlang der Bewegung.

**Folgerung nach dem Stabilitätskriterium von Ljapunoff:**

**Alle Gleichgewichtspunkte  $(x, v) = (x, 0)$  mit  $h'(x) = 0$ ,  $h''(x) > 0$  sind stabil.**

## Formaler Nachweis der Stabilität/ Instabilität bei der 1-dimensionalen Bewegung auf einer gekrümmten Bahn

Bewegungsgleichung als DGL 1. Ordnung: 
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -g h'(x) + r(v)/m \end{bmatrix}$$

**Gleichgewichtspunkte hat man für  $v = 0$ ,  $h'(x) = 0$ .**

**Wir betrachten nun die Gleichgewichtspunkte, für die  $h''(x) < 0$  gilt.**

Die Jacobi-Matrix der rechten Seite der DGL ist

$$J(x, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-g h'(x) + r(v)/m) & \frac{\partial}{\partial v}(-g h'(x) + r(v)/m) \\ \frac{\partial}{\partial x} v & \frac{\partial}{\partial v} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g h''(x) & r'(v)/m \end{bmatrix}$$

Sie hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{r'(v)}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r'(v)}{2m}\right)^2 - g h''(x)}.$$

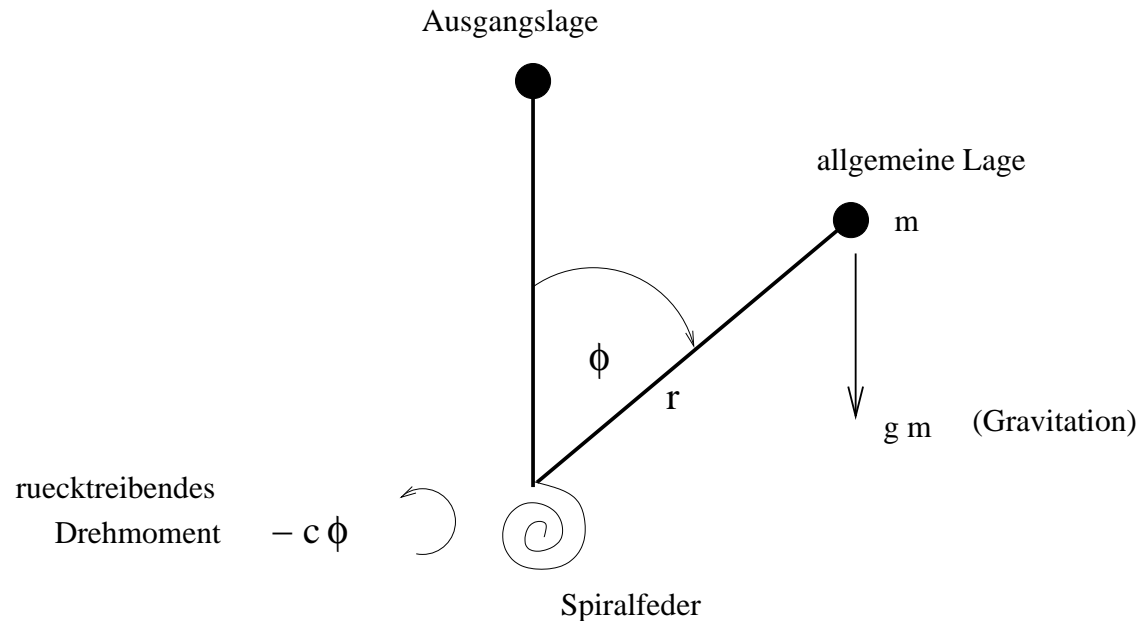
Wenn  $h''(x) < 0$ , dann ist mindestens einer der Eigenwerte positiv.

**Folgerung aus dem linearen Stabilitätskriterium:**

**Alle Gleichgewichtspunkte  $(x, v) = (x, 0)$  mit  $h'(x) = 0$ ,  $h''(x) < 0$  sind instabil.**

**Bemerkung:** Für den Fall, dass  $h''(x) = 0$  braucht man kompliziertere Methoden um Stabilität/Instabilität nachzuweisen.

## Beispiel: Inverses Pendel auf einer Spiralfeder



Bewegungsgleichung:

$$m r^2 \ddot{\phi} = m g r \sin(\phi) - c \phi. \quad (*)$$

Energie:

$$E(\phi, \omega) = \underbrace{\frac{1}{2} m r^2 \omega^2}_{E_{kin}} + \underbrace{m g r \cos(\phi) + \frac{1}{2} c \phi^2}_{E_{pot}}, \quad \omega = \dot{\phi} = \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

**Problem:** Welche Gleichgewichtslagen hat das System, und sind diese stabil?

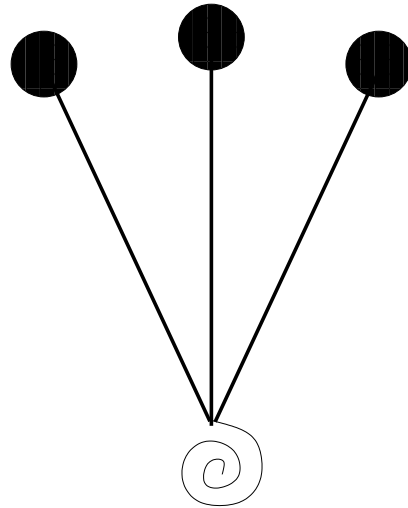
Die Gleichgewichtslagen sind die Nullstellen der rechten Seite von (\*).

# Die Gleichgewichtslagen des inverses Pendels



Kleine Masse.

Eine stabile Gleichgewichtslage



Grosse Masse.

Drei Gleichgewichtslagen.

Die Mittlere ist instabil.

Die beiden anderen sind stabil.

