

Notizen zur Vorlesung über unendliche Reihen

Michael Karow, TU-Berlin
karow@math.TU-Berlin.de

October 19, 2007

Def: (a) Eine unendliche Reihe ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad a_k \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

(Statt mit $k = 1$ kann man auch mit einem anderen Index $k = m$ anfangen)

(b) Die endlichen Summen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

nennt man Partialsummen von $(*)$.

(c) Die Reihe $(*)$ konvergiert gegen $s \in \mathbb{C}$, wenn

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Ist dies der Fall, so schreibt man

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(d) Eine nicht konvergente Reihe nennt man divergent.

Grundtatsachen: (1) Wenn $(*)$ konvergiert, dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Beweis: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

(2) Wenn $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergieren, dann auch $\sum (\lambda a_k)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, und $\sum (a_k + b_k)$.

Man hat

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Bsp.1: Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1.$$

Denn $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ und daher

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Bsp.2: Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1,$$

denn

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

↑ Beweis mit vollst. Induktion

Bsp.3: Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (**)$$

Wenn $|q| \geq 1$, dann ist $(**)$ divergent, weil die Folge der Summanden nicht gegen 0 konvergiert. Wenn $|q| < 1$ dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Grund: Für $q \neq 1$ ist

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \left(\rightarrow \frac{1}{1 - q} \text{ wenn } |q| < 1 \right),$$

denn

$$\begin{aligned} (1 - q)s_n &= s_n - q s_n \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ &\quad - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Anwendung:

$$0,999\dots = \frac{9}{10} \cdot 1,111\dots = \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Bei den nächsten Beispielen benutzen wir folgendes Grundprinzip (G):

Eine aufsteigende Folge $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt

ist, d.h. wenn $s_n \leq c$ für alle n und eine feste Konstante $c \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert ist dann die kleinste obere Schranke c .

Bsp.4: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert.

1. Beweis:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{(\dots\dots)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Beweis: $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \rightarrow \infty.$$

Anwendung der harmonischen Reihe: Schiefer Turm aus Bauklötzen (siehe Skript)

Bsp.5: Riemannsche Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad s > 1.$$

Diese Reihen konvergieren, denn

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^s} dx = \int_1^n \frac{1}{x^s} dx = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^n = \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \leq \underbrace{\frac{1}{s-1}}_{\text{obere Schranke}}$$

Man hat z.B. (Beweis später)

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Konvergenz- und Divergenzkriterien

Alle folgenden Kriterien beruhen letztendlich auf dem Grundprinzip (G) (siehe oben).

K1) Integralkriterium: Sei $f : [m, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_m^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

K2) Sei $a_k \in \mathbb{C}$. Wenn $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, dann auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.
Kurz: aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

Beweis:

$$\sum_{k=m}^n \underbrace{(\operatorname{Re}(a_k) + |a_k|)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=m}^n 2|a_k| \leq 2 \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|}_{\text{obere Schranke}}.$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=m}^n (\operatorname{Re}(a_k) + |a_k|)}_{\text{konvergent}} - \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) \text{ konvergent.}$$

Analog zeigt man, dass $\sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$ konvergiert. Somit ist auch

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) + i \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$$

konvergent.

K3) Majorantenkriterium:

$$|a_k| \leq b_k \text{ und } \sum_{k=m}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent.}$$

Grund: $\sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k \leftarrow$ obere Schranke.

Bsp.6: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-ik}}{\ln(k)k^2}$ ist konvergent, denn $\left| \frac{e^{-ik}}{\ln(k)k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$.

K4) Minorantenkriterium:

$$0 \leq b_k \leq a_k \text{ und } \sum_{k=m}^{\infty} b_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

Bsp.7:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergiert und } \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\ln(k)} \Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} \text{ divergiert.}$$

K3) Quotientenkriterium für Konvergenz: Sei $0 < q < 1$.

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ für } k \geq k_o \Rightarrow \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent.}$$

Grund:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \right| \leq q &\Rightarrow |a_{k_0+1}| \leq q |a_{k_0}|, \\ \left| \frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0}} \right| \leq q &\Rightarrow |a_{k_0+2}| \leq q |a_{k_0+1}| \leq q^2 |a_{k_0}|. \end{aligned}$$

Allgemein: $|a_{k_0+j}| \leq |a_{k_0}| q^j$. Also für $n = k_0 + l$,

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0} |a_k| + |a_{k_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^l q^j}_{\leq \frac{q}{1-q}} \leftarrow \text{beschränkt.}$$

K5) Quotientenkriterium für Divergenz:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für } k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

Grund: a_k ist dann keine Nullfolge, weil $|a_{k+1}| \geq |a_k|$.

K6) Limes-Variante des Quotientenkriteriums:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{Konvergenz} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz.} \end{cases}$$

Bsp.8: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ ist konvergent, denn

$$\left| \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} \right| = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Bsp.9: Konvergenz/Divergenz von $\sum \frac{1}{k}$ ist nicht mit Q.Kriterium entscheidbar, denn

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1.$$

K7) Leibnitz-Kriterium:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ konvergent.}$$

Grund: Seien $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$ die Partialsummen. Da die Folge a_k monoton fallend ist, gilt

$$\text{für ungerades } n: \quad s_{n+2} = s_n - a_{n+1} + a_{n+2} \leq s_n,$$

$$\text{für gerades } n: \quad s_{n+2} = s_n + a_{n+1} - a_{n+2} \geq s_n.$$

Die Teilfolge $s_1, s_3, s_5, \dots$ ist also monoton fallend. Die Teilfolge $s_2, s_4, s_6, \dots$ ist monoton wachsend. Beide Teilfolgen laufen aufeinander zu und die Differenzen der Folgenglieder werden beliebig gering, denn für gerades n ist $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \rightarrow 0$.

Bsp.10: Man hat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2),$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis für die Grenzwerte später. Diese Reihen sind nicht absolut konvergent.