Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

Wintersemester 07/08

Michael Karow

Themen: Niveaumengen und Gradient

Wir betrachten differenzierbare **reellwertige** Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}, \qquad G \text{ offen}$$

Zur Vereinfachung konzentrieren wir uns dabei auf den Fall

$$n = 2.$$

Alles, was nun folgt, gilt aber sinngemäß für beliebiges n.

Die Funktion in den folgenden Bildern ist

$$f(x, y) = x(x - 1)^2 - 2y^2 + 8$$

Erinnerung 1:
Die Niveau-Menge einer Funktion $f : G \supseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist:

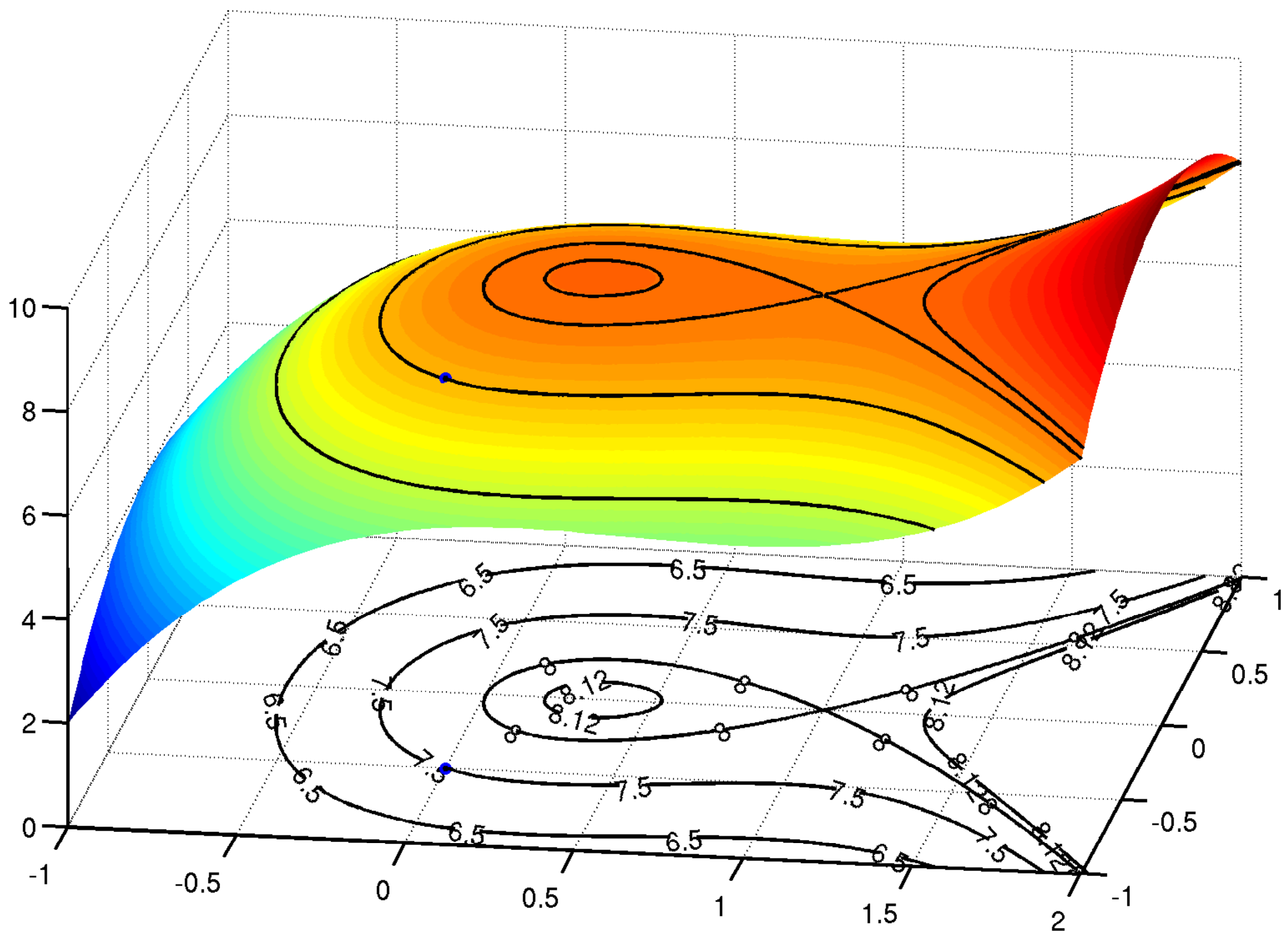
$$N_f(c) := \{\ (x, y) \in G; \quad f(x, y) = c\}$$

Diese Mengen können Kurven sein, müssen es aber nicht.

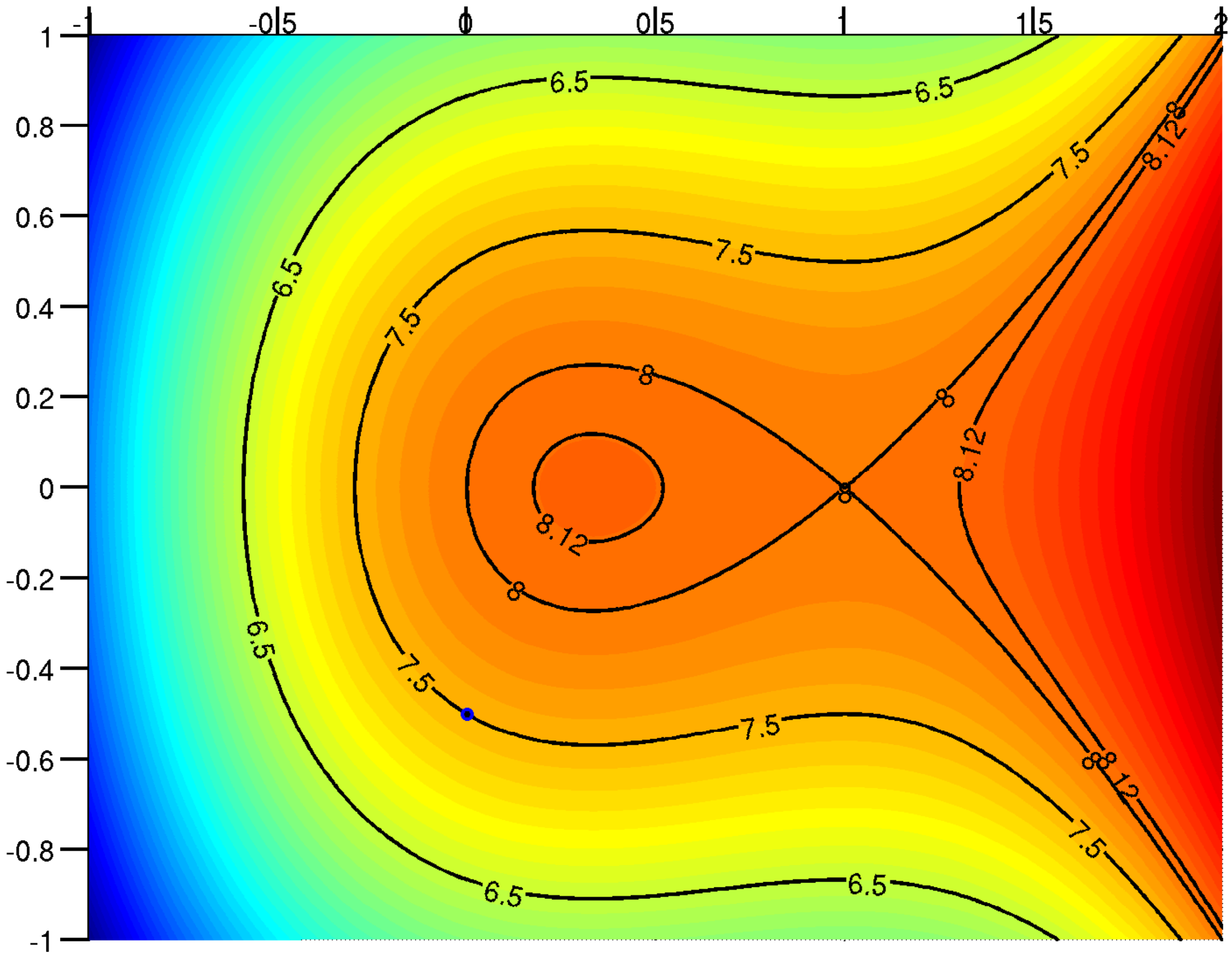
Erinnerung 2:
Die partielle Ableitung von f in x-Richtung an der Stelle (x, y) erhält man, wenn man f als Funktion von x allein auffasst und y als Konstante betrachtet, also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Analog für y.



10
8
6
4
2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
-1
-0.5
0
0.5
1
6.5
7.5
8.12



-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
6.5
7.5
8
8.12

Jacobi-Matrix und Gradient

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$.
Die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) von f an der Stelle (x, y) ist

$$f'(x,y) = J_{(x,y)}f = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] \qquad \text{(Zeilenvektor)}$$

Den Gradient von f an der Stelle (x, y) bekommt man, wenn die partiellen Ableitungen in einem Spaltenvektor zusammenfasst, d.h., wenn man die Jacobi-Matrix transponiert. **Notation:**

$$\text{grad}_{(x,y)}f = (\text{grad}\, f)(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix},$$

(∇ ausgesprochen: Nabla)

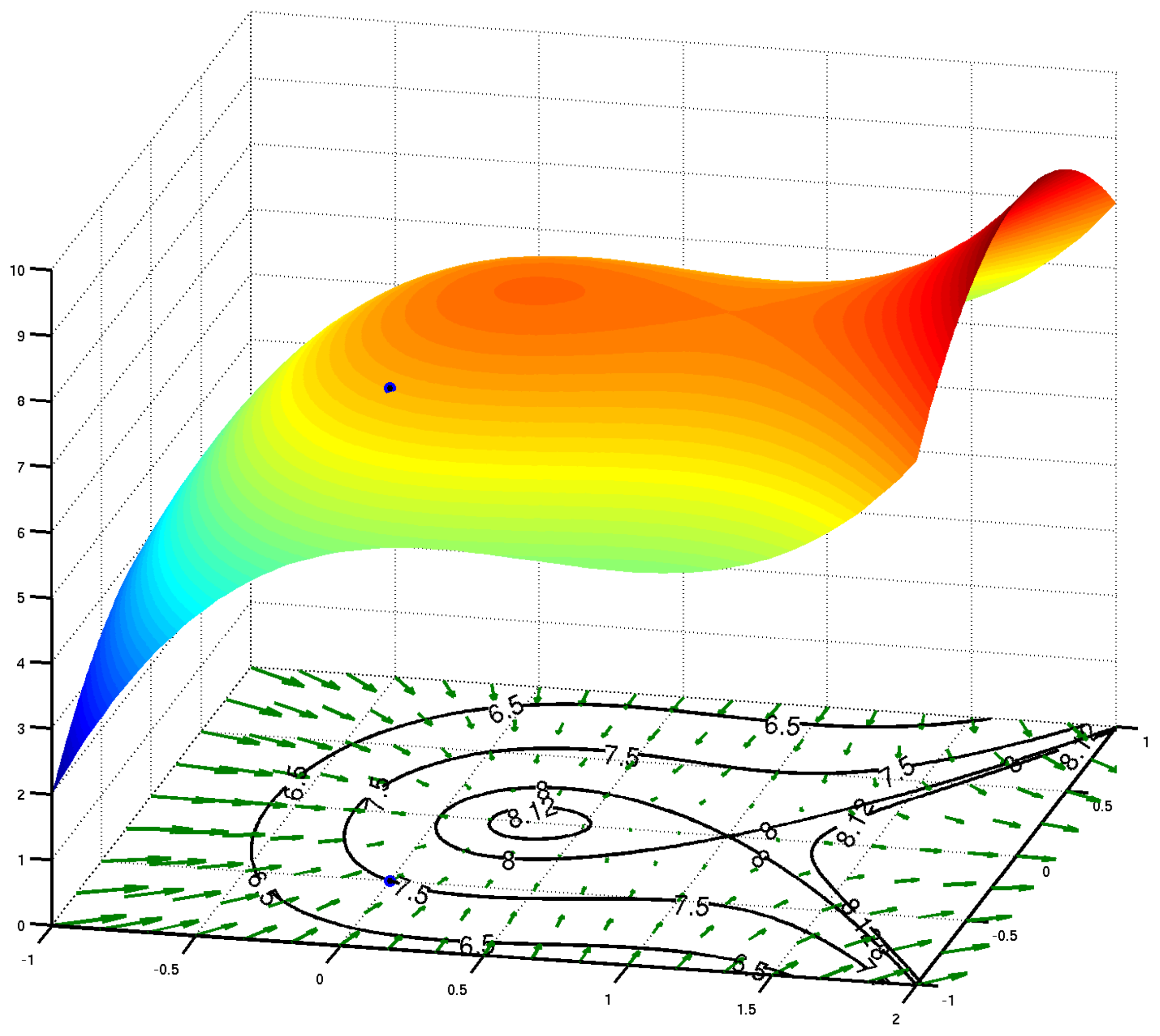
Das Differential

Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existieren und stetige Funktionen sind, dann ist das totale Differential (d.h. die Ableitung als lineare Abbildung) definiert durch

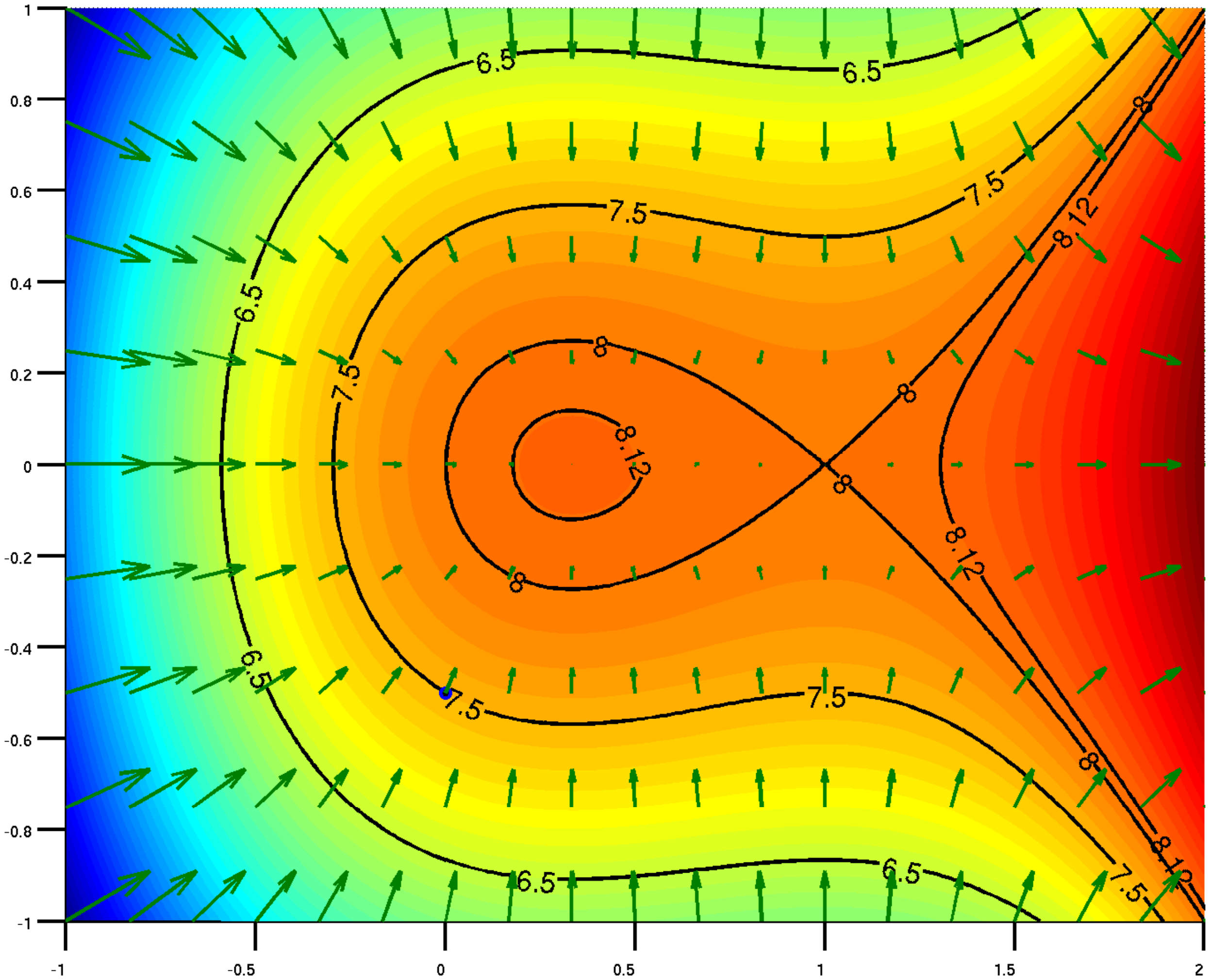
$$
\begin{aligned}
d_{(x,y)}f\left(\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}\right) &= f'(x,y)\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} && \text{(Matrixprodukt)}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\Delta y\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} && \text{(Skalarprodukt)}\\
&= \nabla f(x,y)\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Den Gradienten betrachtet man als Vektor, der am Punkt (x,y) angeheftet ist. Man erhält so ein **Vektorfeld**.

Graph von f mit Gradientenfeld ∇f in der xy-Ebene



Gradientenfeld ∇f und einige Niveaumengen von f



Die lineare Approximation

Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existieren und stetige Funktionen sind, dann gilt mit einer Restfunktion R,

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= f(x,y) + d_{(x,y)}f\left(\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}\right) + R(\Delta x, \Delta y)\\
&= f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\Delta y + R(\Delta x, \Delta y)\\
&= \underbrace{f(x,y) + \nabla f(x,y)\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}}_{\text{affin-linearer Anteil}} + R(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}
$$

Wenn $(\Delta x, \Delta y)$ hinreichend klein, dann ist $R(\Delta x, \Delta y)$ klein im Vergleich zum linearen Anteil und man hat

$$
f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \nabla f(x,y)\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}
$$

Das Ergebnis der vorherigen Seite motiviert die Diskussion der affin-linearen Funktionen

$$L(\Delta x, \Delta y) = c_0 + a\,\Delta x + b\,\Delta y \;=\; c_0 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

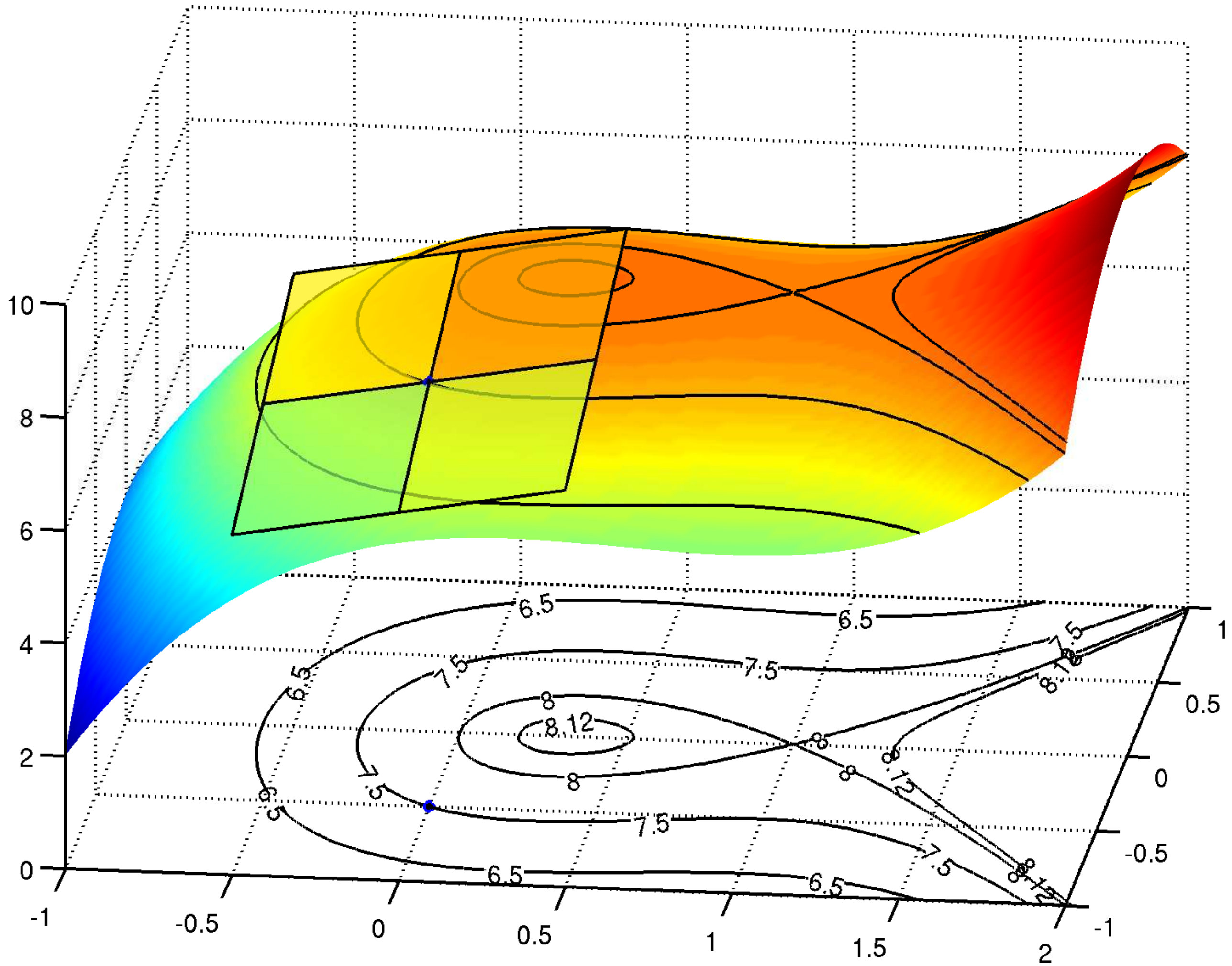
Der Graph von L besteht aus den Punkten

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ L(\Delta x, \Delta y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ c_0 + a\,\Delta x + b\,\Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \Delta x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \Delta y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$$

Folgerung: der Graph von L ist eine unendlich ausgedehnte Ebene, die durch

den Punkt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ geht und von den Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$ aufgespannt wird.

Setzt man $c_0 = f(x, y)$, $a = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, so bekommt man die **Tangentialebene** an den Graphen von f an der Stelle (x, y).



10
8
6
4
2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
1
0.5
0
-0.5
-1
6.5
7.5
8
8.12

Richtungsableitungen I

Die Richtungsableitung von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ist der folgende rechtsseitige Grenzwert:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) \quad := \quad \lim_{t \to 0+} \frac{f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\,\vec{v}\right) - f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)}{t}$$

Wenn der Limes existiert, dann gilt für $t \geq 0$:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\,\vec{v}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + t\,\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) + R(t), \qquad \lim_{t \to 0+} \frac{R(t)}{t} = 0.$$

Die Richtungsableitung gibt also die Wachstumsrate (Steigung) von f in Richtung $\vec{v}$ an.

Richtungsableitungen II

Satz: Wenn die partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung von (x, y) existieren und stetig sind, dann gilt für die Richtungsableitungen

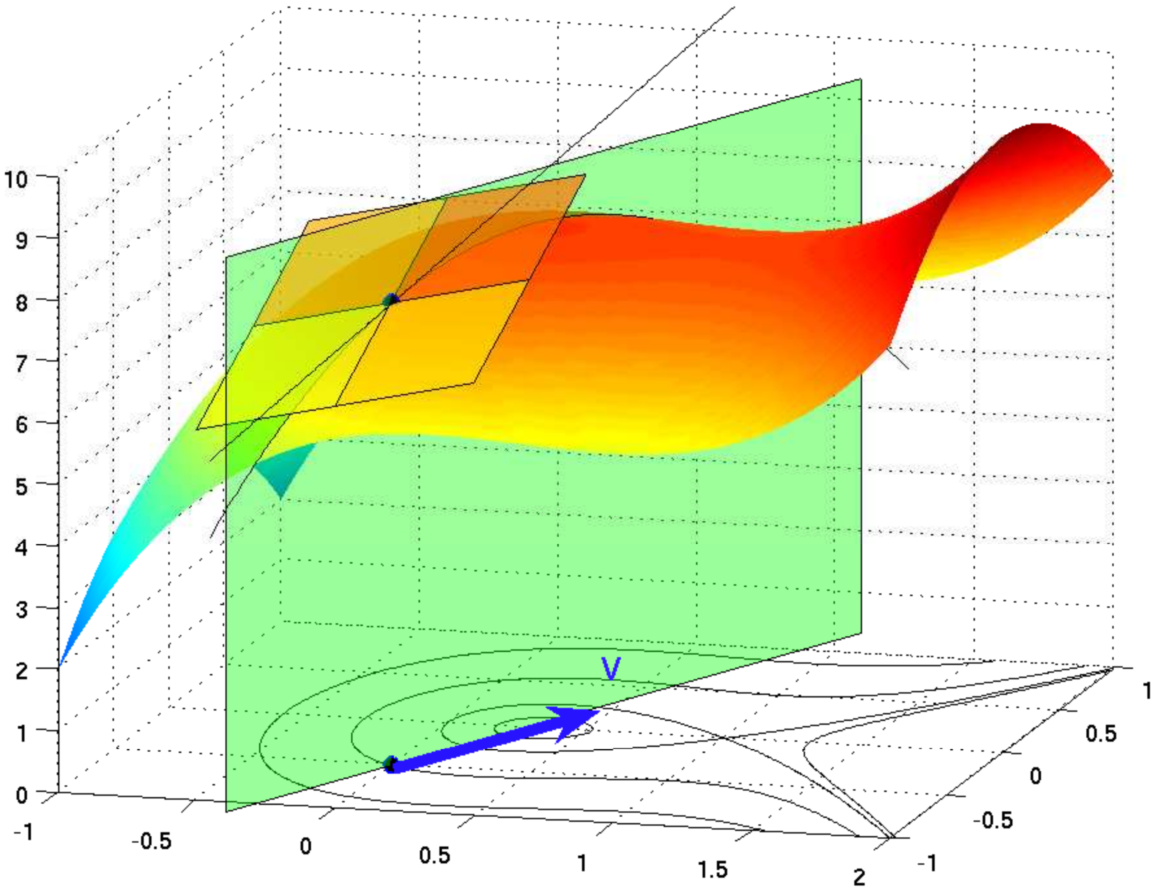
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) \;=\; \nabla f(x, y) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, v_y$$

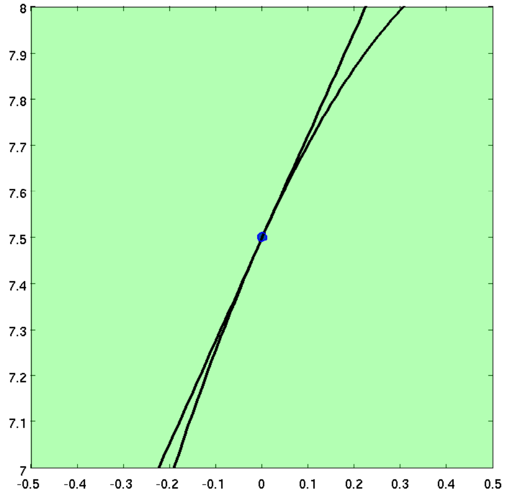
Insbesondere hat man für die kanonischen Basisvektoren $\vec{e_1} = (1, 0)$ und $\vec{e_2} = (0, 1)$, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e_1}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{e_2}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ bekommt man als Steigung der Schnittkurve, die man erhält, wenn man den Graph von f mit der senkrechten Ebene schneidet, die durch (x, y) geht und $\vec{v}$ als Richtungsvektor hat (siehe die nächsten Seiten).

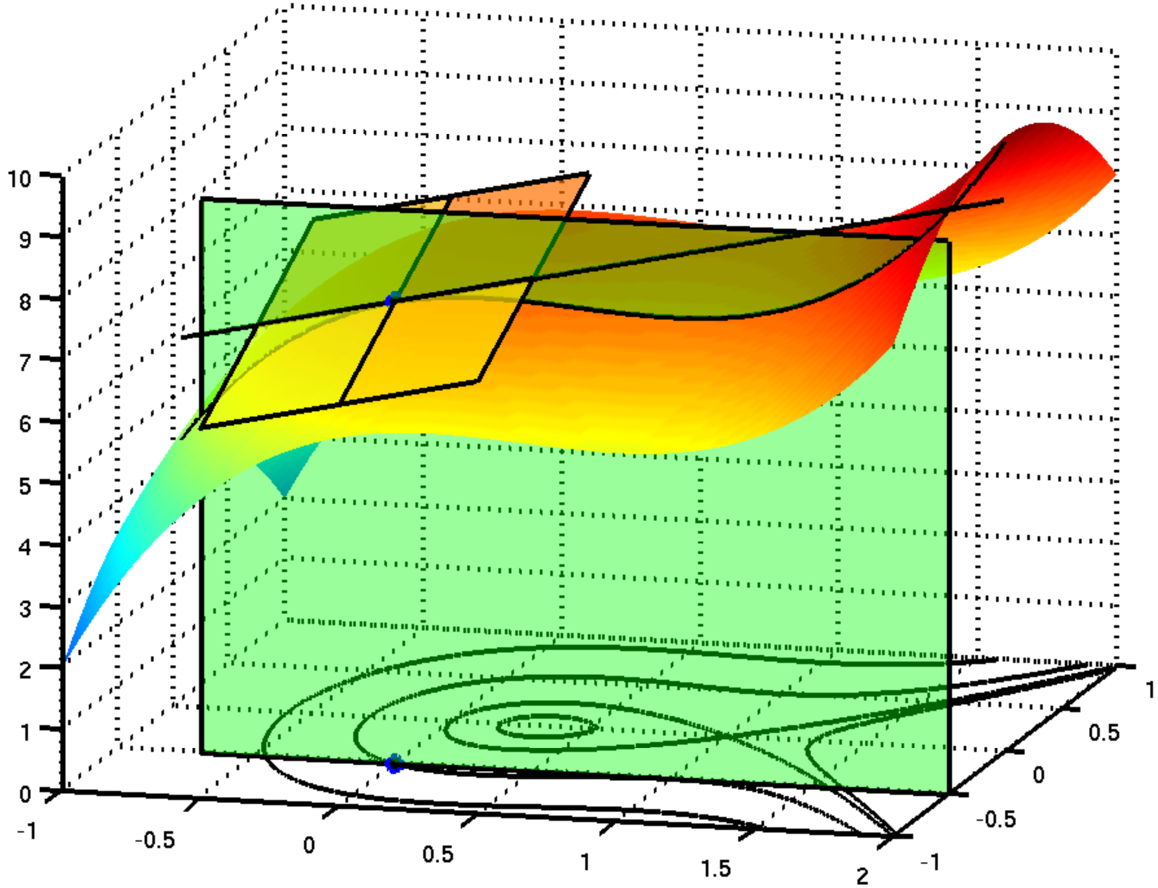
Senkrechter Schnitt durch den Graphen in Richtung $\vec{v}$

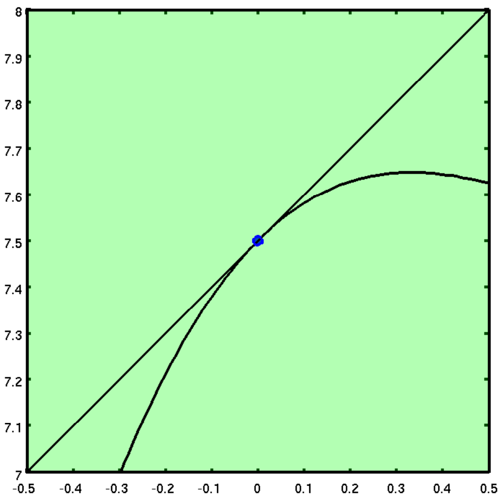




Das rechte Bild zeigt die Schnittkurven mit dem Graphen und der Tangentialebene.Die Steigung ist die Richtungsableitung.

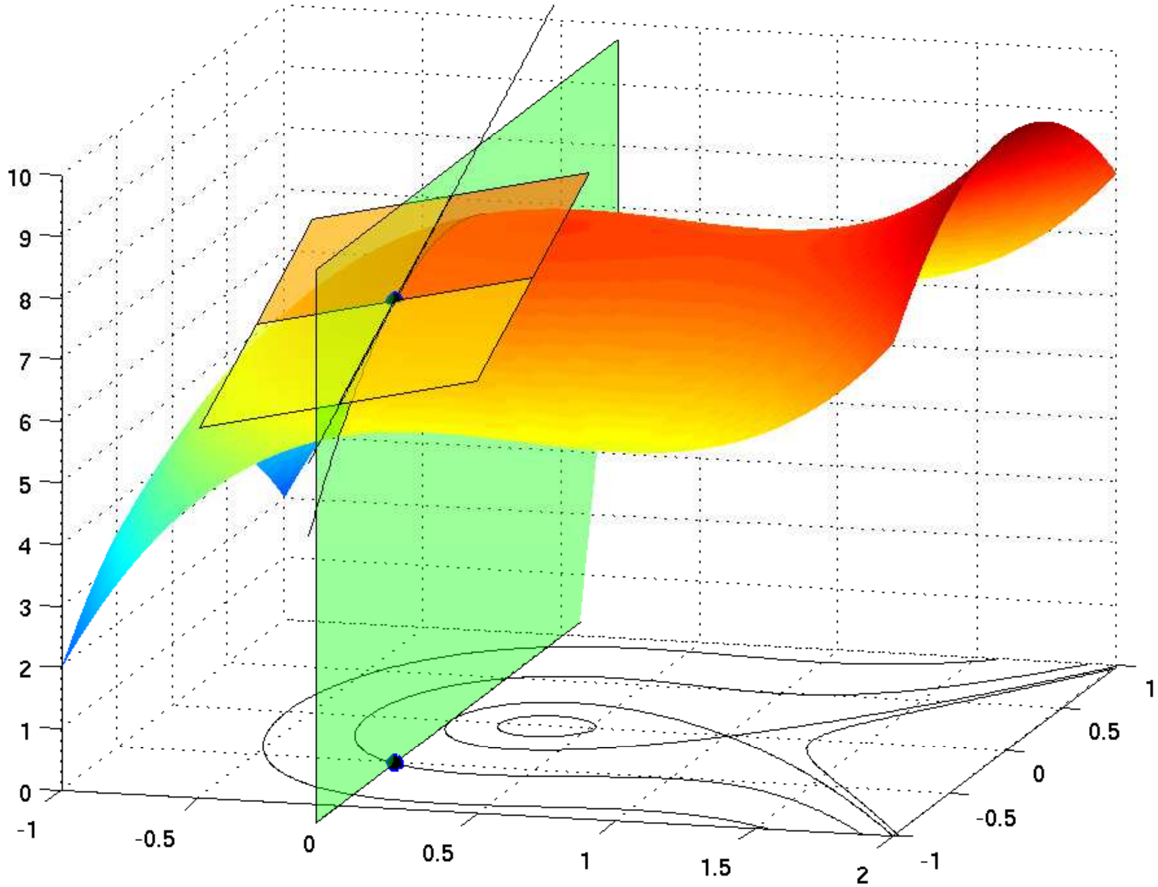
Senkrechter Schnitt durch den Graphen in x-Richtung

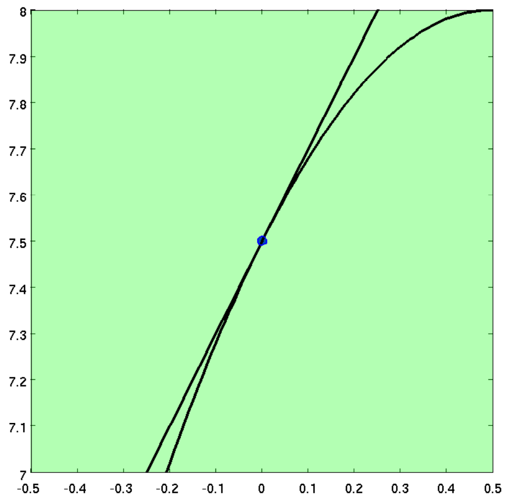




Die Steigung der Schnittkurve ist die partielle Ableitung nach x.

Senkrechter Schnitt durch den Graphen in y-Richtung





Die Steigung der Schnittkurve ist die partielle Ableitung nach y.

Größe der Richtungsableitungen

Sei $\vec{v}$ ein Einheitsvektor (d.h. $|\vec{v}| = 1$).
Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v} = |\nabla f(x, y)| \cos(\phi),$$

wobei ϕ der Winkel zwischen $\nabla f(x, y)$ und $\vec{v}$ ist.

Folgerungen:

1. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$ ist maximal, wenn $\nabla f(x, y) = |\nabla f(x, y)| \, \vec{v}$.
   Die Richtung des Gradienten ist die Richtung des maximalen Anstiegs.

2. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$ ist minimal, wenn $\nabla f(x, y) = -|\nabla f(x, y)| \, \vec{v}$.

3. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = 0$, genau dann, wenn $\nabla f(x, y)$ senkrecht zu $\vec{v}$ ist.

Gradient und Niveaulinien

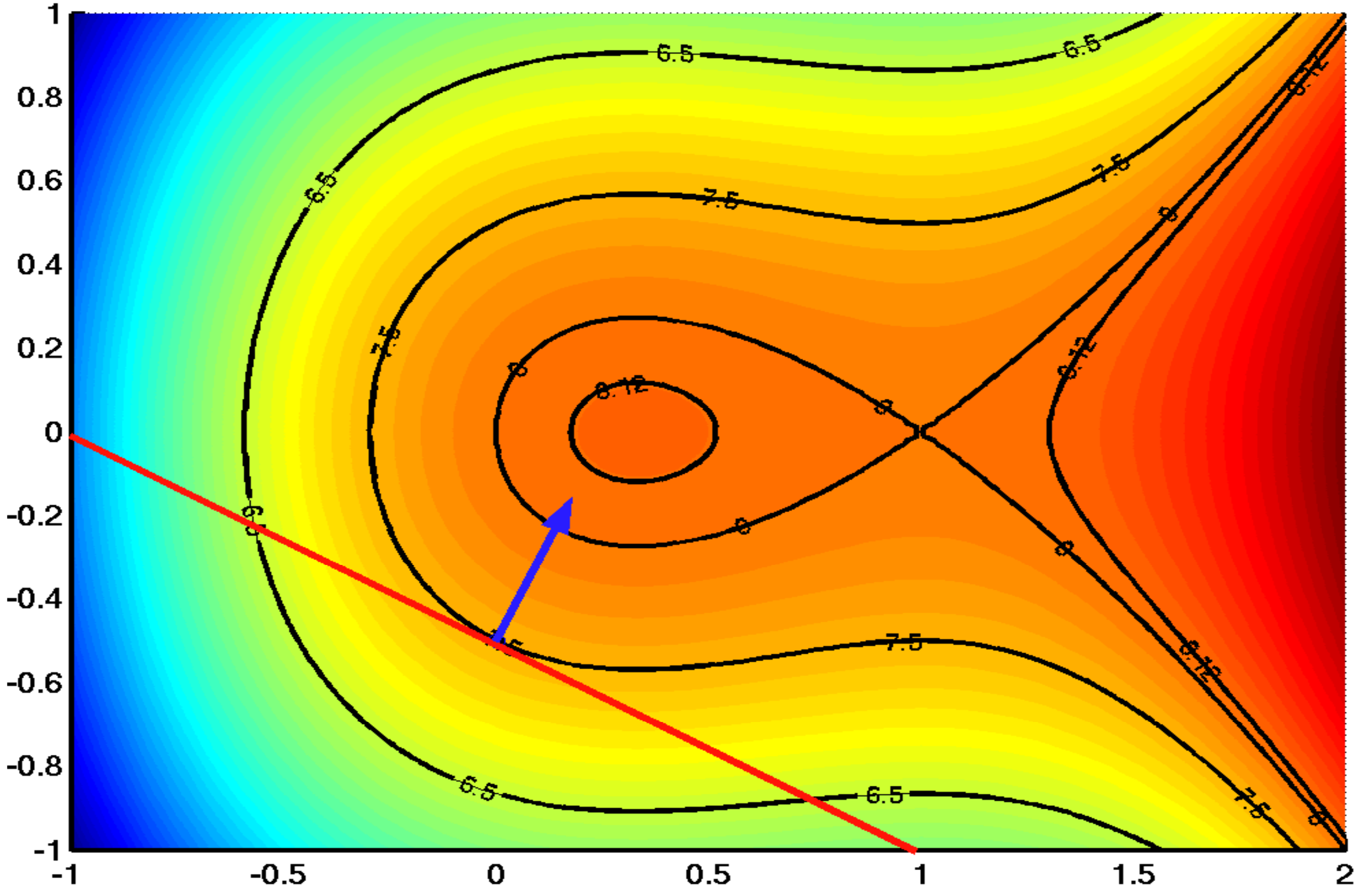
Satz: Sei f in einer Umgebung von (x, y) stetig differenzierbar und

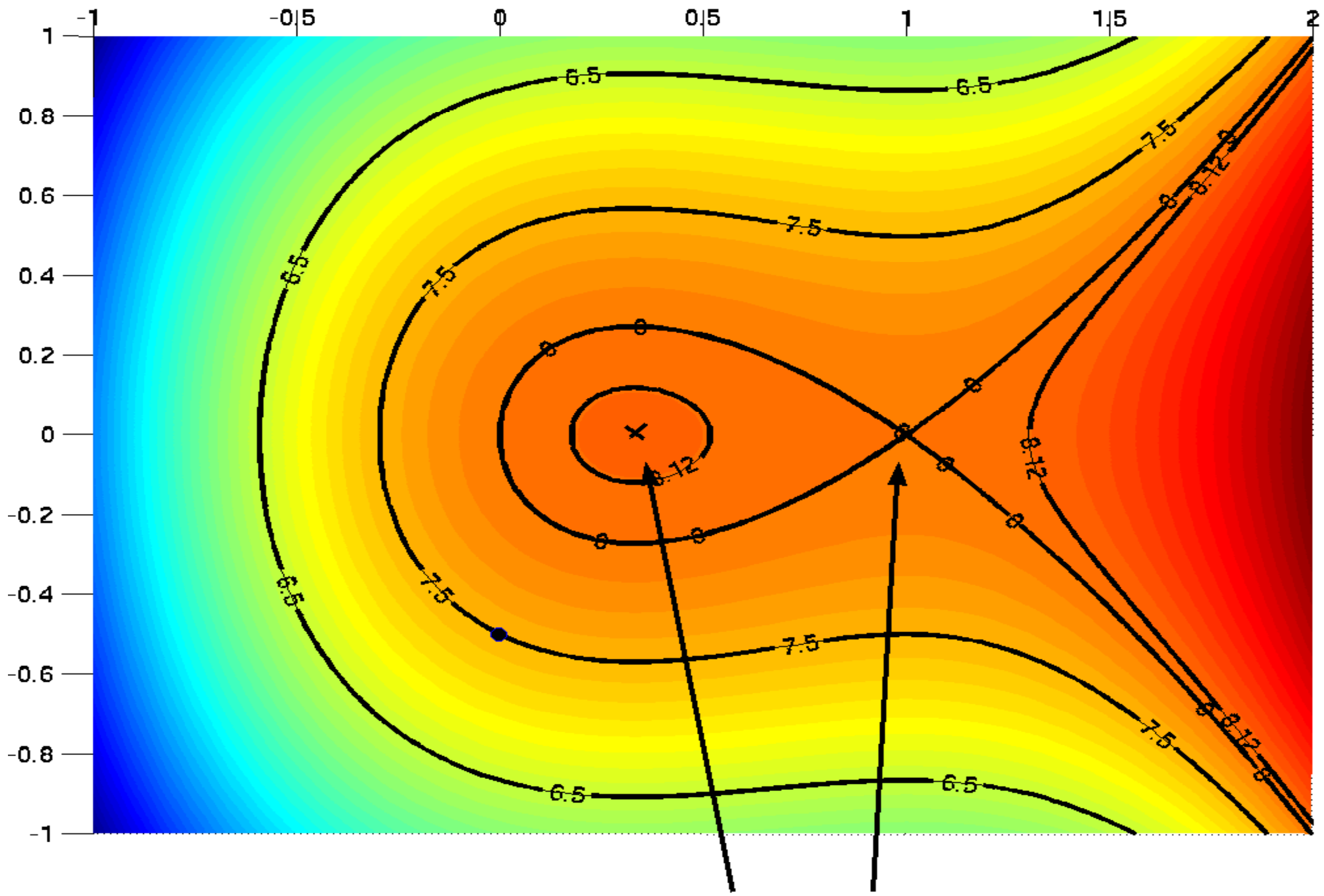
$$\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$$

Dann ist die Niveaumenge, in der (x, y) liegt in einer Umgebung dieses Punktes eine glatte Kurve und $\nabla f(x, y)$ steht senkrecht auf (der Tangente) dieser Kurve. Siehe die Illustration auf der nächsten Seite.

Das folgende Bild zeigt den Gradienten (blauer Pfeil) und die Tangente der Niveaulinie (rote Gerade) von $f(x,y) = x(x-1)^2 - 2\,y^2 + 8$ an der Stelle $(x,y) = (0,-1/2)$.

Der Gradient steht senkrecht auf (der Tangente der) Niveaulinie.





Nullstellen des Gradienten.

Lokale Extrema und Richtungsableitungen

Angenommen, f ist an der Stelle (x, y) differenzierbar und hat dort ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum. Dann müssen an dieser Stelle alle Richtungsableitungen 0 sein, also

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v}, \qquad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Setzt man $v = \nabla f(x, y)$, so folgt

$$0 = \nabla f(x, y) \cdot \nabla f(x, y) = |\nabla f(x, y)|^2.$$

Also:

$$\nabla f(x, y) = 0.$$