Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

Wintersemester 07/08

Michael Karow

Themen: Koordinatensysteme, klassische Differentialoperatoren

Polarkoordinaten

$x = \rho \cos(\phi)$

$y = \rho \sin(\phi)$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

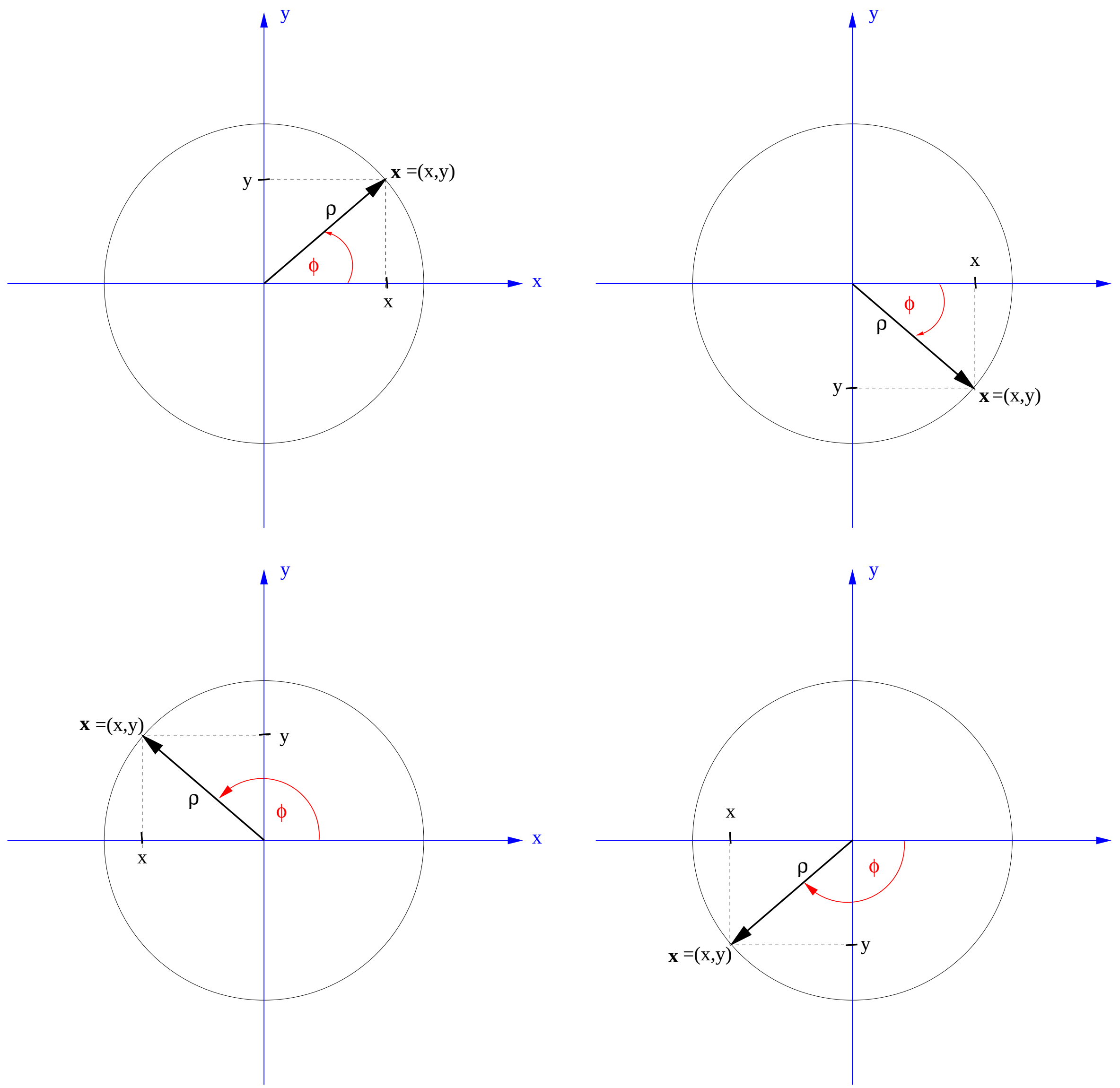
$\tan(\phi) = \frac{y}{x}$ für $x \neq 0$.

Winkel ϕ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Üblich: $\phi \in]-\pi, \pi]$

Dann:

$$\phi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \\ 0 & x = y = 0. \end{cases}$$



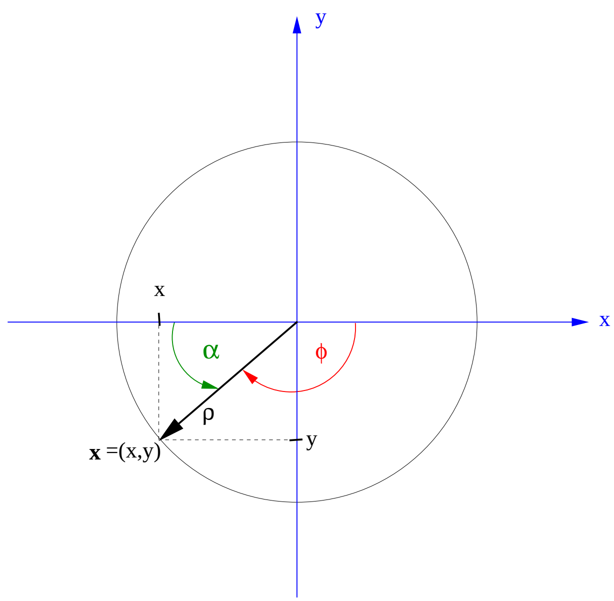
Erläuterung zur Winkelberechnung aus den kartesichen Koordinaten

Wie auf der vorigen Seite dargestellt, erfordert die Berechnung des Winkels ϕ aus den kartesischen Koordinaten x, y einige Fallunterscheidungen. Der Grund dafür ist folgender: Der Schluss

$$\tan(\phi) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan(\frac{y}{x})$$

gilt nur, wenn $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$. Die Bedingung $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$ ist aber nur dann erfüllt, wenn der Punkt (x, y) in der rechten Halbebene liegt, wenn also $x > 0$. Anderenfalls muss man überlegen. Wenn z.B. $x < 0$, $y < 0$, dann (siehe Bild) argumentiert man so:

$$\phi = -\pi + \alpha = -\pi + \arctan(\frac{|y|}{|x|}) = -\pi + \arctan(\frac{y}{x})$$



Eine Formel für den Winkel, die (fast) ohne Fallunterscheidung auskommt

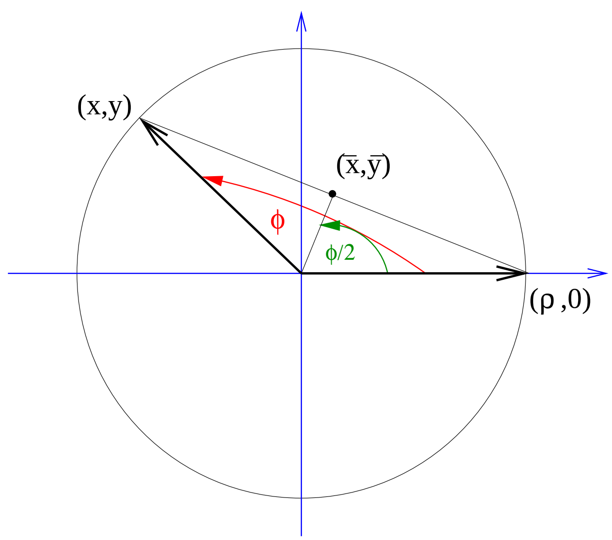
Diese Formel lautet

$$\phi = 2\,\text{arctan}\left(\frac{y}{x+\rho}\right), \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Die Formel ist nur dann nicht anwendbar, wenn der Nenner 0 ist, wenn also $y = 0$, $x \leq 0$.

Herleitung der Formel: Wenn der Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ nicht auf der negativen x-Achse liegt, dann liegt der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(\,(x, y) + (\rho, 0)\,)$ in der rechten Halbebene und es ist $\tan(\bar{y}/\bar{x}) = \phi/2$ (siehe Bild). Also

$$\phi = 2\,\frac{\phi}{2} = 2\,\text{arctan}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) = 2\,\text{arctan}\left(\frac{y}{x+\rho}\right)$$



Partielle Ableitungen und Polarkoordinaten 1

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho \cos(\phi))}{\partial \rho} = \cos(\phi) = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho \sin(\phi))}{\partial \rho} = \sin(\phi) = \frac{y}{\rho}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho \cos(\phi))}{\partial \phi} = -\rho \sin(\phi) = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho \sin(\phi))}{\partial \phi} = \rho \cos(\phi) = x$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\arctan(y/x)}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\arctan(y/x)}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\rho^2}$$

Partielle Ableitungen und Polarkoordinaten 2

Mit den partiellen Ableitungen auf der vorigen Seite kann man z.B. eine Funktion von kartesischen Koordinaten nach Polarkoordinaten ableiten, ohne sie vorher in Polarkoordinaten umzurechen.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2y^3$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = = \frac{\partial f}{\partial x}(-y) + \frac{\partial f}{\partial y}x = 2xy^3(-y) + 3x^2y^2x = -2xy^4 + 3x^3y^2.$$

Zum Vergleich die Rechnung in Polarkoordinaten:

$$f(x,y) = x^2y^3 = (\rho\cos(\phi))^2(\rho\sin(\phi))^3 = \rho^5\cos(\phi)^2\sin(\phi)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \phi} &= -\rho^5\,2\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\phi)^3 + \rho^5\sin(\phi)^2 3\cos(\phi)^2\sin(\phi)^2 \\ &= -2xy^4 + 3x^3y^2\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

Beziehung zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z):

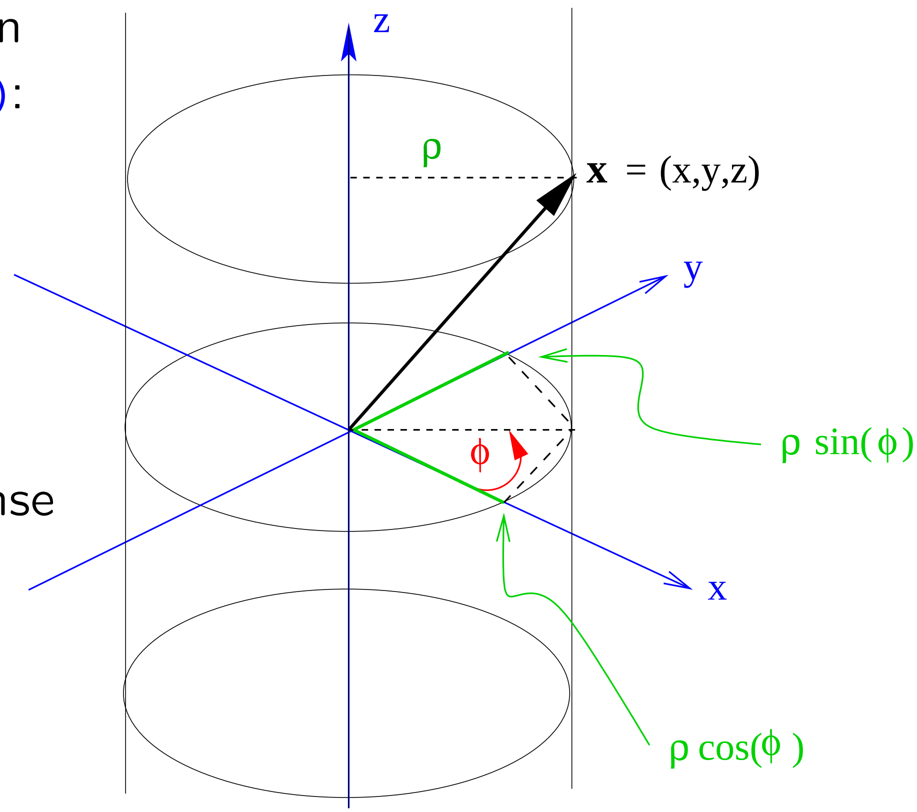
$x = \rho \cos(\phi)$

$y = \rho \sin(\phi)$

$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

ρ ist der Abstand von der z-Achse



Kugelkoordinaten

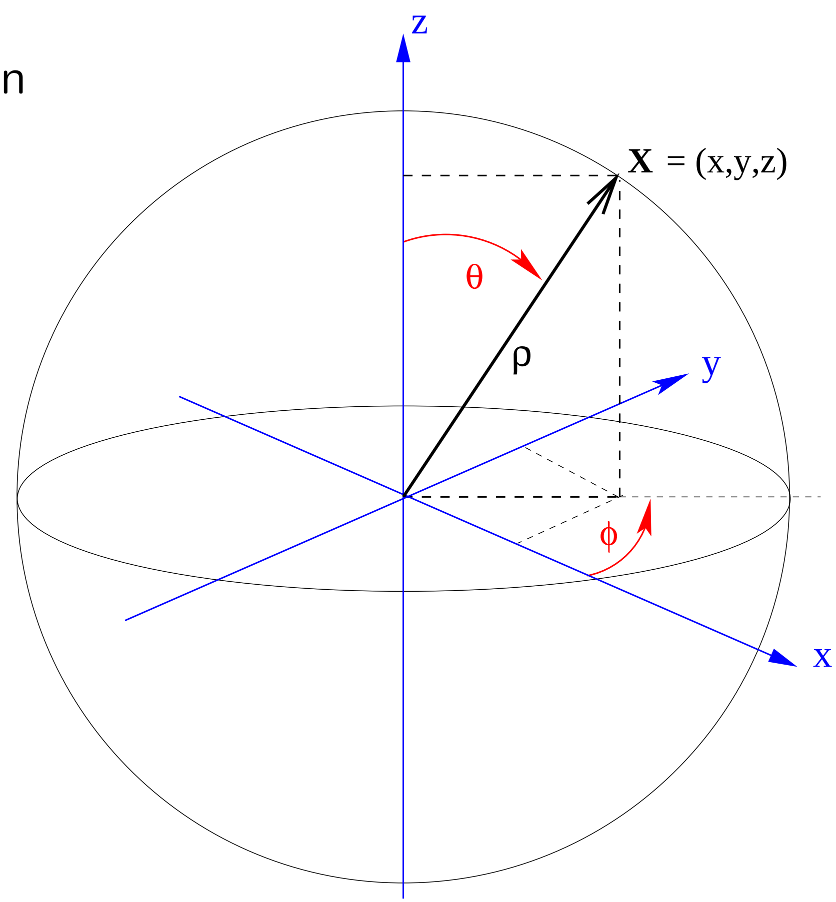
Beziehung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = \rho \cos(\theta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Kugelkoordinaten

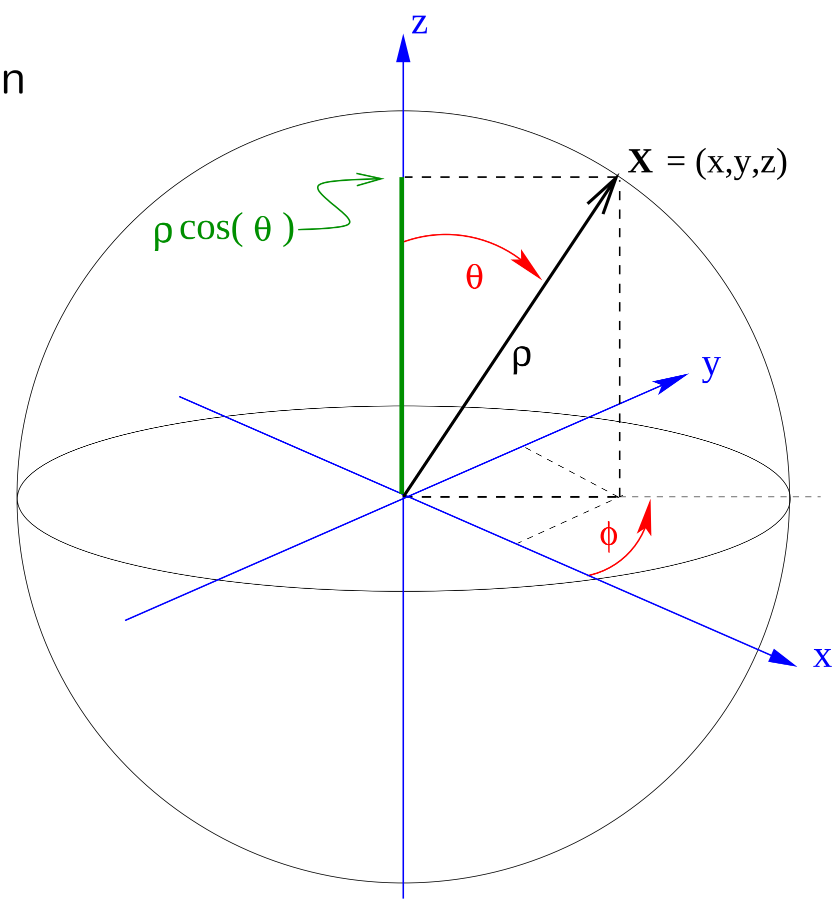
Beziehung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = \rho \cos(\theta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Kugelkoordinaten

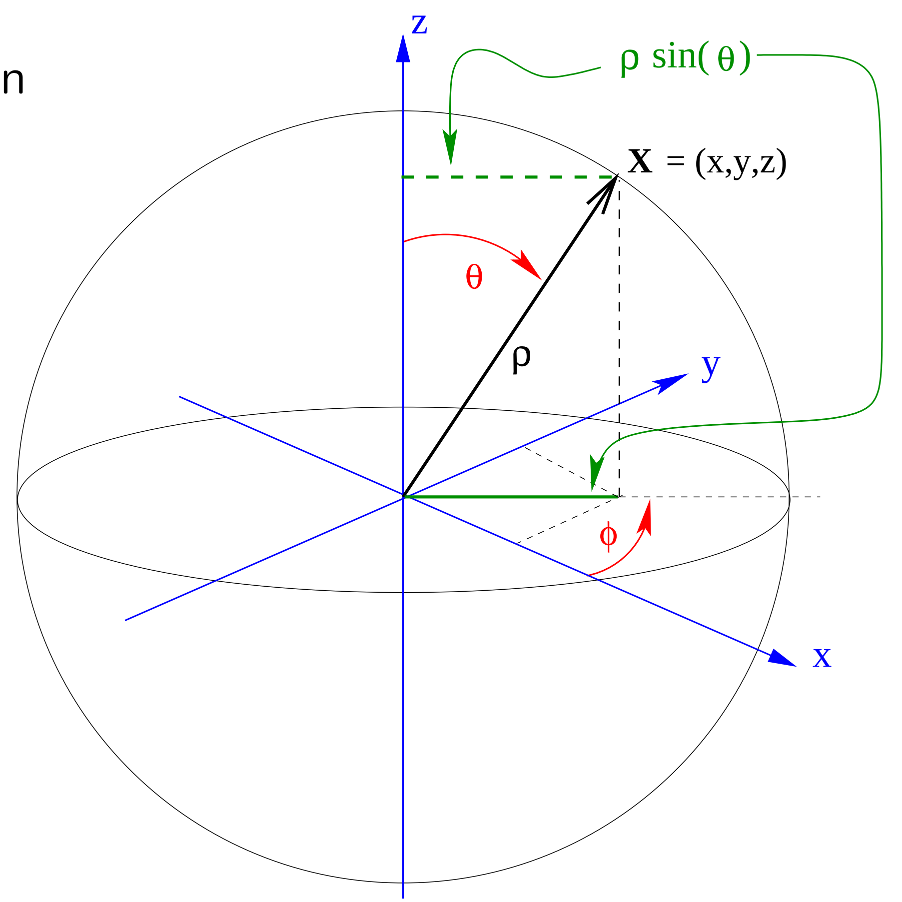
Beziehung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$

$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$

$z = \rho \cos(\theta)$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Kugelkoordinaten

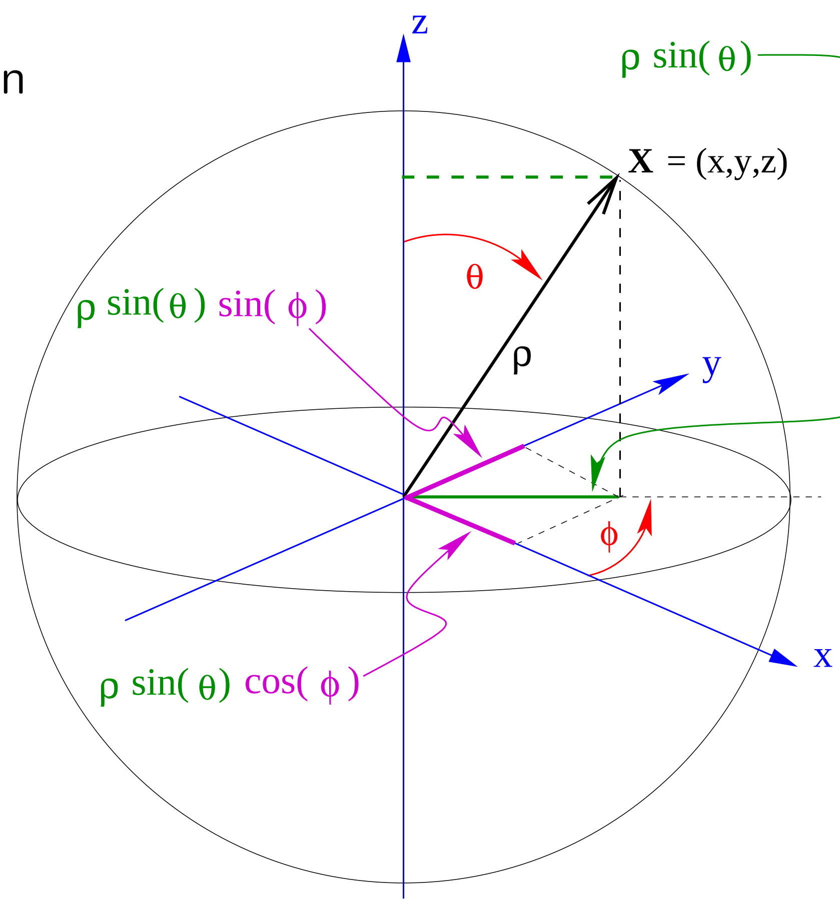
Beziehung zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = \rho \cos(\theta)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Klassiche Differentialoperatoren sind

1. der **Gradient** (eines skalaren Feldes):

$$\text{grad } f = \nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}]^\top.$$

2. die **Divergenz** (eines Vektorfeldes):

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}.$$

3. die **Rotation** (eines Vektorfeldes in $\mathbb{R}^3$):

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

4. der **Laplace-Operator** (eines Skalar- oder eines Vektorfeldes):

$$\Delta \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_k^2}$$

(Summe aller zweiten partiellen Ableitungen) Für skalare Felder hat man

$$\Delta f \ = \ \text{div grad } f.$$

Anwendung der Differentialoperatoren: Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen beschreiben alle (nicht quantenmechanischen) elektrodynamischen Phänomene. Sie lauten

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{J} \\
\operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
\operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

Hinzu kommen Materialgesetze:

$$\vec{D} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{B} = \mu_0\,\vec{H} + \vec{M}.$$

Dabei ist $\vec{E}$=elektrische Feldstärke, $\vec{D}$ = Verschiebungsstromdichte, $\vec{H}$=magnetische Feldstärke, $\vec{B}$ = magnetische Induktion, $\vec{J}$ =Stromdichte, ρ=elektrische Ladungsdichte, $\vec{P}$=Polarisationsdichte, $\vec{M}$=Magnetisierungsdichte. ϵ_0=elektrische Feldkonstante, μ_0=magnetische Feldkonstante.

Durch Kombination dieser Gleichungen bekommt man im einfachsten Fall, d.h. wenn $\vec{P} = \vec{M} = \vec{J} = 0$, $\rho = 0$) die Wellengleichungen

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \vec{0}, \qquad \Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = \vec{0}, \qquad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

(c=Lichtgeschwindigkeit)

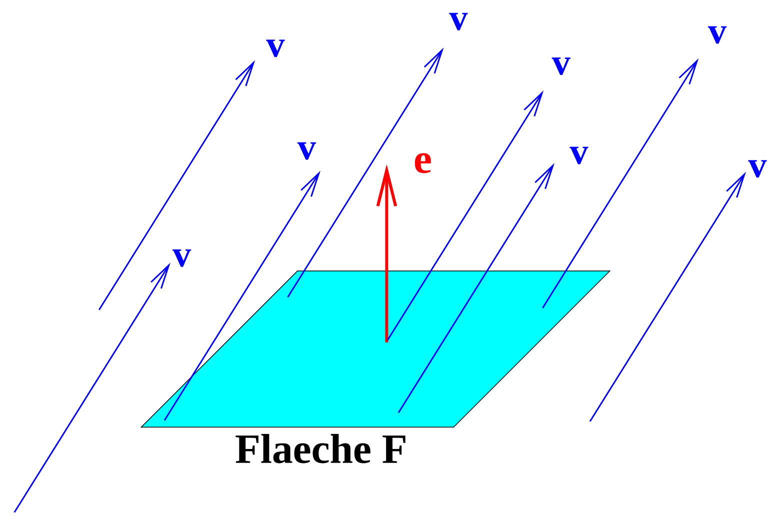
Vektorfelder als Geschwindigkeitsfelder, Fluss durch eine Fläche

Ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ kann man im Fall $n \leq 3$ anschaulich als Geschwindigkeitsfeld interpretieren:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \text{Geschwindigkeit des materiellen Punktes, der sich am Ort } \vec{x} \text{ befindet}$$

Sei $n = 3$, F eine ebene kleine Fläche im Gebiet G und $\vec{e}$ ein Einheitvektor, der senkrecht zur Fläche steht. Dann ist das Materievolumen, das pro Zeiteinheit durch die (gedachte) Fläche F strömt, näherungsweise:

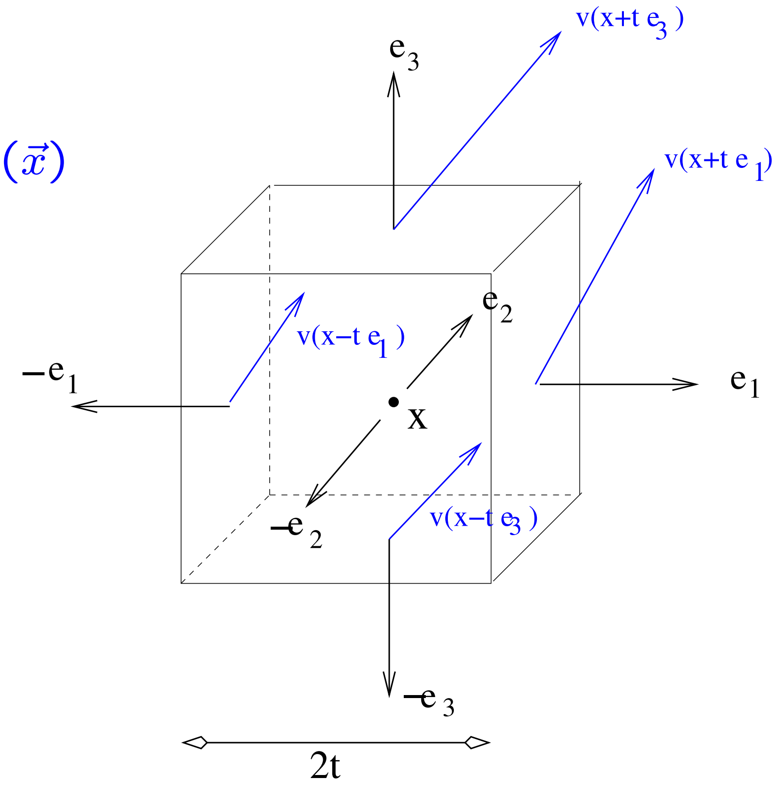
$$\text{Volumenstrom(fluss)} \approx (\vec{v} \cdot \vec{e}) \cdot (\text{ Flächeninhalt von } F).$$



Geometrische Bedeutung der Divergenz:

Fluss eines Vektorfeldes durch die Oberfläche eines kleinen Würfels (Zentrum: $\vec{x}$, Kantenlänge: $2t$)

$$\begin{aligned}
\text{Fluss} &\approx \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{e_k} \cdot \vec{v}(\vec{x} + t\,\vec{e_k})\,(2t)^2 - \vec{e_k} \cdot \vec{v}(\vec{x} - t\,\vec{e_k})\,(2t)^2\right) \\
&\approx \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{e_k} \cdot (\vec{v}(\vec{x}) + t\,\vec{v}'(\vec{x})\vec{e_k})\,(2t)^2 - \vec{e_k} \cdot (\vec{v}(\vec{x}) - t\,\vec{v}'(\vec{x})\vec{e_k})\,(2t)^2\right) \\
&= (8\,t^3) \sum_{k=1}^{3} \vec{e_k} \cdot (\vec{v}'(\vec{x})e_k) \\
&= \text{Würfelvolumen} \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(\vec{x}) \\
&= \text{Würfelvolumen} \cdot \text{div}_{\vec{x}}\vec{v}
\end{aligned}$$



Zur geometrisch/physikalischen Bedeutung der Rotation

Um die Bedeutung der Rotation eines Vektorfeldes zu verstehen, braucht man einige Tatsachen aus der linearen Algebra.

Tatsache 1: Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich eindeutig als Summe einer symmtrischen Matrix A^+ und einer schiefsymmetrischen Matrix A^- schreiben. Genauer:

$$A = A^+ + A^-,$$

wobei

$$A^+ = \frac{1}{2}(A + A^\top), \qquad A^- = \frac{1}{2}(A - A^\top).$$

Tatsache 2: Die Multiplikation eines 3-dimensionalen Vektors mit einer schiefsymmetrischen Matrix lässt sich als Kreuzprodukt schreiben.

Genauer: Sei $A^- \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch. Dann ist

$$A^- = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Es ist

$$A^- \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2\,x_3 - a_3\,x_2 \\ a_3\,x_1 - a_1\,x_3 \\ a_1\,x_2 - a_2\,x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{a} \times \vec{x}.$$

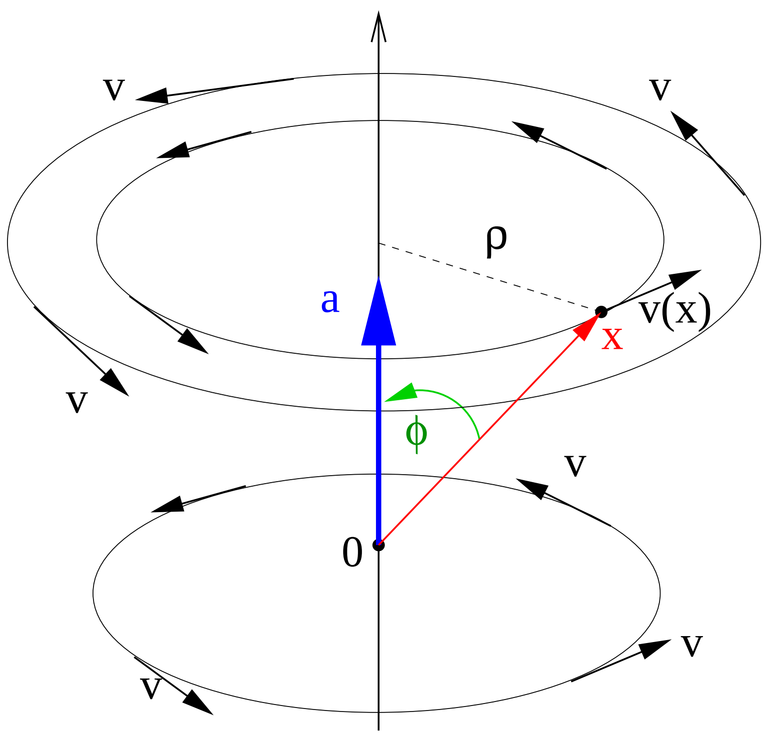
Terminologie: $\vec{a}$ heisst axialer Vektor von A^-.

Physikalische Interpretation des axialen Vektors

Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = A^{-}\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$ ist das Geschwindigkeitsfeld eines starren Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec{a}|$ um die durch $\vec{a}$ gegebene Achse rotiert.

Begründung: $\vec{v}(\vec{x})$ steht senkrecht zu $\vec{x}$ und $\vec{a}$. Sei ϕ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und der Drehachse, und sei ρ der Abstand von $\vec{x}$ und der Drehachse. Dann ist

$$|\vec{v}(\vec{x})| = |\vec{a} \times \vec{x}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{x}| \sin(\phi)}_{=\rho}$$



Eine direkte Rechnung ergibt, dass für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v} = 2\,\vec{a}$$

Die Rotation als axialer Vektor des doppelten schiefsymmetrischen Anteils der Jacobi-Matrix

Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die Ableitung $\vec{v}' : \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein stetiges Matrixfeld. Es gilt für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\vec{v}'(\vec{x}) - (\vec{v}'(\vec{x}))^\top)\,\vec{u} = \mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v} \times \vec{u}$$

Für die Taylor-Entwicklung von $\vec{v}$ bis zur ersten Ordnung um einen Punkt $\vec{x} \in G$ gilt daher

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) &\approx \vec{v}(\vec{x}) + \vec{v}'(\vec{x})\,\Delta\vec{x} \\
&= \vec{v}(\vec{x}) + (\vec{v}'(\vec{x})^+ + \vec{v}'(\vec{x})^-)\,\Delta\vec{x} \\
&= \vec{v}(\vec{x}) + \vec{v}'(\vec{x})^+\Delta\vec{x} + \underbrace{\vec{v}'(\vec{x})^-\,\Delta\vec{x}}_{=\frac{1}{2}\mathrm{rot}_{\vec{x}}\,\vec{v}\times\Delta\vec{x}}\ ,
\end{aligned}$$

wobei

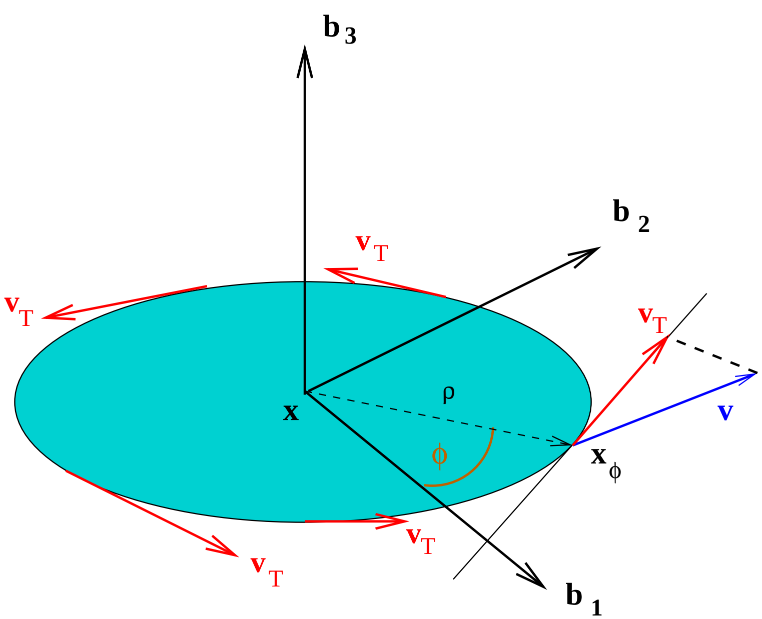
$$\vec{v}'(\vec{x})^+ = \frac{1}{2}(\vec{v}'(\vec{x}) + (\vec{v}'(\vec{x}))^\top), \qquad \vec{v}'(\vec{x})^- = \frac{1}{2}(\vec{v}'(\vec{x}) - (\vec{v}'(\vec{x}))^\top)$$

Rotation und Drehmoment

Drehmoment, das eine Strömung auf ein kleines Rad mit Mittelpunkt $\vec{x}$ und Radius ρ ausübt, das sich um die $\vec{b}_3$-Achse drehen kann:

$$D = \int_0^{2\pi} \vec{v}_T(\vec{x}_\phi)\, d\phi \approx \rho\, 2\pi\, \det(\mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}, \vec{b_1}, \vec{b_2}) = \rho\, 2\pi\, \mathrm{rot}_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \vec{b}_3$$

Dabei ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ eine Orthonormalbasis und $\vec{v}_T(\vec{x}_\phi)$ die tangentiale Komponente von $\vec{v}$ an der Stelle $\vec{x}_\phi = \rho\,(\cos(\phi)\vec{b}_1 + \sin(\phi)\vec{b}_2)$, siehe Bild.



Die obige Behauptung wird auf den nächsten Seiten bewiesen. Zunächst braucht man eine Hilfsaussage.

Tatsache 3: Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sei ausserdem $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ der axiale Vektor von A^-. Dann gilt

$$\vec{w} \cdot A\vec{u} - \vec{u} \cdot A\vec{w} = \det(2\,a, \vec{u}, \vec{w}) = 2\,a \cdot (\vec{u} \times \vec{w}).$$

Begründung: Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt

$$\vec{w} \cdot B\vec{u} = \begin{cases} (B\vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (B\vec{w}) & \text{wenn } B \text{ symmetrisch} \\ -(B\vec{w}) \cdot \vec{u} = -\vec{u} \cdot (B\vec{w}) & \text{wenn } B \text{ schiefsymmetrisch} \end{cases}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{w} \cdot A\vec{u} - \vec{u} \cdot A\vec{w} &= \vec{w} \cdot (A^+ + A^-)\vec{u} - \vec{u} \cdot (A^+ + A^-)\vec{w} \\
&= \underbrace{\vec{w} \cdot (A^+\vec{u}) - \vec{u} \cdot (A^+\vec{w})}_{=0} + \vec{w} \cdot (A^-\vec{u}) \underbrace{- \vec{u} \cdot (A^-\vec{w})}_{=\vec{w}\cdot(A^-\vec{u})} \\
&= 2\,\vec{w} \cdot (A^-\vec{u}) \;=\; 2\,\vec{w} \cdot (\vec{a} \times \vec{u}) \;=\; 2\,\det(\vec{w}, \vec{a}, \vec{u}) \\
&= 2\,\det(\vec{a}, \vec{u}, \vec{w}) \;=\; \det(2\,\vec{a}, \vec{u}, \vec{w}) = 2\,\vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}).
\end{aligned}$$

Folgerung: Setze $A = \vec{v}\,'(\vec{x})$ (Jacobi-Matrix). Dann

$$\vec{w} \cdot \vec{v}\,'(\vec{x})\,\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v}\,'(\vec{x})\,\vec{w} = \mathrm{rot}_{\vec{x}}\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \qquad (**)$$

Beweis der Drehmoment-Formel

Sei $e_\phi = \cos(\phi)\,\vec{b}_1 + \sin(\phi)\,\vec{b}_2$, $e_\phi^\perp = -\sin(\phi)\,\vec{b}_1 + \cos(\phi)\,\vec{b}_2$. Dann gilt

$$\vec{x}_\phi = \rho\,\vec{e}_\phi, \qquad ,\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi^{\perp} = 0, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\phi^{\perp} = \vec{b}_3,$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{v}_T(\vec{x}_\phi) &= \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}(\vec{x}_\phi) = \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}(x + \rho\,\vec{e}_\phi) \\
&\approx \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot (\vec{v}(\vec{x}) + \vec{v}'(\vec{x})\,(\rho\,\vec{e}_\phi)) \qquad \text{(Taylorentwicklung)} \\
&= \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}(\vec{x}) + \rho\,\vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}'(\vec{x})\,\vec{e}_\phi \\
&= \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}(\vec{x}) + \rho\,\mathrm{rot}_{\vec{x}}\vec{v} \cdot \underbrace{(\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\phi^{\perp})}_{=\vec{b}_3} \qquad \text{(wegen (**), vorigen Seite)}
\end{aligned}$$

Integrieren ergibt:

$$D = \int_0^{2\pi} \vec{v}_T(\vec{x}_\phi)\,d\phi \approx \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_\phi^{\perp} \cdot \vec{v}(\vec{x}_\phi)\,d\phi}_{=0} + \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{rot}_{\vec{x}}\vec{v} \cdot \vec{b}_3\,d\phi = 2\pi\,\rho\,\mathrm{rot}_{\vec{x}}\vec{v} \cdot \vec{b}_3.$$