Notizen zur Vorlesung über Koordinatensysteme

Michael Karow

November 26, 2009

<u>Definition:</u> Ein Koordinatensystem (KS) auf $G \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige und injektive Abbildung

$$G \ni \vec{x} \longmapsto \begin{bmatrix} u_1(\vec{x}) & u_2(\vec{x}) & \dots & u_n(\vec{x}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Die Werte $u_1(\vec{x})$, $u_2(\vec{x}), \dots, u_n(\vec{x})$ sind die Koordinaten von $\vec{x}$. Injektiv heißt:

$$\vec{x_1} \neq \vec{x_2} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} u_1(\vec{x_1}) & \dots & u_n(\vec{x_1}) \end{bmatrix}^\top \neq \begin{bmatrix} u_1(\vec{x_2}) & \dots & u_n(\vec{x_2}) \end{bmatrix}^\top$$

(d.h. verschiedene Punkte haben auch verschiedene Koordinaten).

Sei

$$G \ni \vec{x} \longmapsto \begin{bmatrix} q_1(\vec{x}) & q_2(\vec{x}) & \dots & q_n(\vec{x}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n.$$

ein weiteres KS. Dann gibt es eine bijektive (umkehrbare) Abbilung T (Koordinatentransfornation), mit der man die Koordinaten u_k in die Koordinaten q_k umrechnen kann.

$$\begin{tikzcd} & \vec{x} \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ \left[u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots\dots, u_n(\vec{x})\right]^\top \arrow[rr, mapsto, shift left, "T"] & & \left[q_1(\vec{x}), q_2(\vec{x}), \dots\dots\dots, q_n(\vec{x})\right]^\top \arrow[ll, mapsto, shift left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

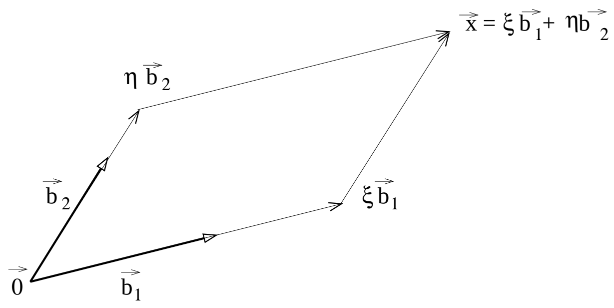
<u>Beispiele für $n = 2$:</u>

(a) Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x(\vec{x}) \\ y(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1. Koordinate} \\ \leftarrow \text{2. Koordinate} \end{array}$

(b) Seien $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$ linear unabhängige Vektoren. Dann gibt es zu jedem $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmte Zahlen $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \xi\, \vec{b}_1 + \eta\, \vec{b}_2 = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

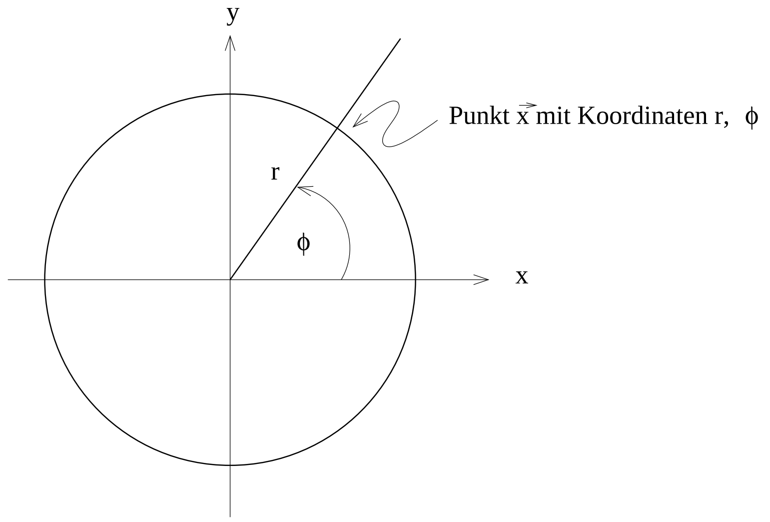
nämlich $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Die Abbildung $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(\vec{x}) \\ \eta(\vec{x}) \end{bmatrix}$ ist ein KS.



(c) Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}$ und negative y-Achse$\}$. Sei

$$\begin{aligned} r(\vec{x}) &:= \text{Abstand des Punktes } \vec{x} \text{ vom Ursprung} = \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi(\vec{x}) &:= \text{Winkel zwischen } \vec{x} \text{ und } x\text{-Achse} = \begin{cases} \arctan(y/x) & x>0, \\ \pi + \arctan(\mathrm{y/x}) & x<0, \\ \pi/2 & x=0, y>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Abbildung $\vec{x} \longmapsto \begin{bmatrix} r(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}) \end{bmatrix}$ ist ein Koordinatensystem.

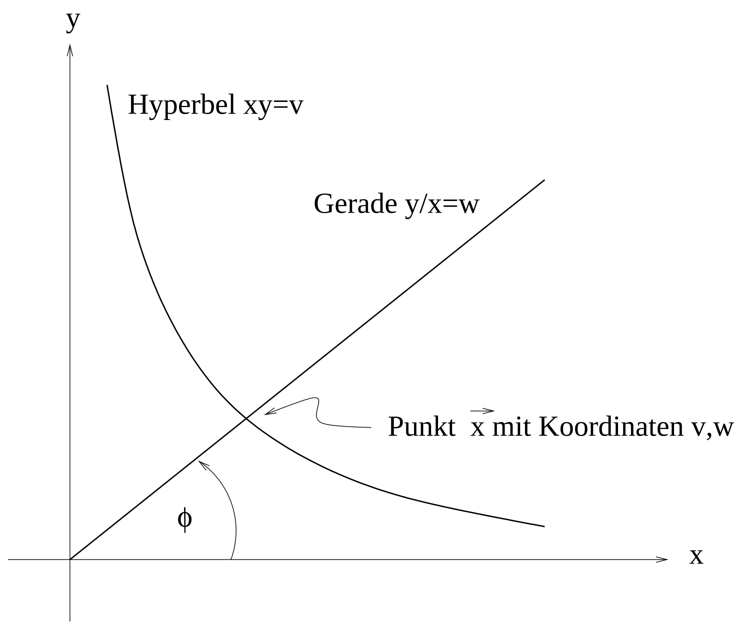


(d) Sei $v(x,y) := xy$, $w(x,y) := y/x$. Dann ist $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} v(x,y) \\ w(x,y) \end{bmatrix}$ ein KS auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ =]0,\infty[\times]0,\infty[$. Es ist

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{v(\vec{x})/w(\vec{x})} \\ \sqrt{v(\vec{x})\, w(\vec{x})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{v/w} \\ \sqrt{vw} \end{bmatrix} \leftarrow \text{Kurzschreibweise.}$$

Umrechnung (K.-Transformation) von (v,w) in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{v/w + vw}, & v &= xy = r^2 \cos(\phi)\sin(\phi), \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\sqrt{vw}}{\sqrt{v/w}}\right) = \arctan(w), & w &= \sin(\phi)/\cos(\phi) = \tan(\phi). \end{aligned} \qquad (*)$$



Partielle Ableitung einer Funktion f nach einer Koordinate.

Sei $G \ni \vec{x} \longmapsto \begin{bmatrix} u_1(\vec{x}) & u_2(\vec{x}) & \dots & u_n(\vec{x}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$ ein KS. Dann kann man $f : G \to \mathbb{R}^n$ als Funktion der Koordinaten ausdrücken:

$$f(\vec{x}) = \hat{f}(u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_n(\vec{x})).$$

Definition: $\dfrac{\partial f}{\partial u_k}(\vec{x}) :=$ Ableitung von $\hat{f}$ nach u_k (wobei u_k als Variable aufgefaßt wird).

Sei $G \ni \vec{x} \longmapsto \begin{bmatrix} q_1(\vec{x}) & q_2(\vec{x}) & \dots & q_n(\vec{x}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$ ein weiteres KS. Dann folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial u_k} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial u_k} + \dots \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial u_k}.$$

Beispiel: Sei

$$f(x, y) = x^2 y = r^3 \cos^2(\phi)\sin(\phi) = \frac{v}{w}\sqrt{vw} = v^{3/2}w^{-1/2}. \qquad (**)$$

Dabei sind x, y die Standard-Koordinaten, r, ϕ Polarkoodinaten (siehe (b)) und v, w die Koordinaten des KS (d). Wir betrachten nun die Ableitung von f nach r. Rechnung in Polarkoordinaten ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2\cos^2(\phi)\sin(\phi).$$

Man bekommt dasselbe Ergebnis, wenn man f zunächst nach den kartesichen Koordinaten ableitet, die Kettenregel anwendet und dann alles in Polarkoodinaten ausdrückt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= (2xy)\cos(\phi) + x^2\,\sin(\phi) \\
&= (2\,r\cos(\phi)\,r\,\sin(\phi))\cos(\phi) + (r\,\cos(\phi))^2\,\sin(\phi) \\
&= 3r^2\cos^2(\phi)\sin(\phi).
\end{aligned}$$

Bisher haben wir $\frac{\partial f}{\partial r}$ in Polarkoordinaten dargestellt. Man kann $\frac{\partial f}{\partial r}$ aber auch bzgl. der anderen KS hinschreiben. Dazu muss man lediglich r und ϕ als Funktion der anderen Koordinaten ausdrücken. So bekommt man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= 3r^2\cos^2(\phi)\sin(\phi) = \frac{r\cos(\phi))^2(r\sin(\phi))}{r} = 3\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= 3(r^2\cos(\phi)\sin(\phi))\sqrt{\cos^2(\phi)} = 3\,\frac{r^2\cos(\phi)\sin(\phi)}{\sqrt{1+\tan(\phi)^2}} = 3\frac{v}{\sqrt{1+w^2}}
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Transformationsformeln $(*)$ und die Identität $1/\cos^2(\phi) = 1 + \tan^2(\phi)$ benutzt. Auf dieselben Ergebnisse kommt man durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= (2xy)\cos(\phi) + x^2\,\sin(\phi) \\
&= \frac{2xy\,(r\cos(\phi))}{r} + \frac{x^2\,(r\sin(\phi))}{r} \\
&= 3\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} \\
&= \frac{\partial}{\partial v}(v^{3/2}w^{-1/2})\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos(\phi)\sin(\phi)) + \frac{\partial}{\partial w}(v^{3/2}w^{-1/2})\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(\tan(\phi))}_{=0} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{v/w}\;2r\;\cos(\phi)\sin(\phi) \\
&= 3\sqrt{v/w}\,\frac{r^2\cos(\phi)\sin(\phi)}{r} \\
&= 3\sqrt{v/w}\frac{v}{\sqrt{v/w+vw}} \\
&= 3\frac{v}{\sqrt{1+w^2}}.
\end{aligned}
$$

Wichtige Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^3$ sind neben den kartesischen Koordinaten die Zylinderkoordinaten (siehe Skript) und die Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ) (siehe Bild) welche mit den kartesischen Koordinaten folgendermaßen zusammenhängen.

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin(\theta)\,\cos(\phi), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\
y &= r\sin(\theta)\,\sin(\phi), \\
z &= r\,\cos(\theta).
\end{aligned}
$$