Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

Wintersemester 07/08

Michael Karow

Thema: Transformationsformel für Gebietsintegrale

Transformation von Gebietsintegralen im $\mathbb{R}^2$ (Satz 124 im Skript)

Seien $B, R \subset \mathbb{R}^2$ kompakte Bereiche, und sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig. Sei

$$\vec{x} : R \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{x}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$$

eine stetig diff'bare Abbildung, die R umkehrbar auf B abbildet (mit eventuellen Ausnahmen an den Randpunkten von R und B). Dann gilt

$$\int\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_R f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(\vec{x}\,'(u,v)) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right)$$

die Funktionaldeterminante von $\vec{x}$.

Bemerkung: Man kann die Variablen u, v als neue Koordinaten für die Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ auffassen.

Beispielaufgabe:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich, der von den Hyperbeln

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{4}{x}$$

und den Geraden

$$y = 4x, \qquad y = 9x$$

begrenzt wird. Berechne das Integral

$$\int\int_B f(x,y)\,dx\,dy, \qquad \text{wobei} \quad f(x,y) = x^3\,y.$$

Lösung der Aufgabe durch Anwenden der Transformationsformel auf den nächsten Seiten.

Lösung der Aufgabe, 1. Schritt: Einführung angepasster Koordinaten u, v

Definiere eine stetig diff'bare Abbildung $\vec{x}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uv \\ v/u \end{bmatrix}.$

Diese Abbildung bildet den offenen positiven Quadranten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ umkehrbar auf sich selbst ab. Die Umkehrung ist

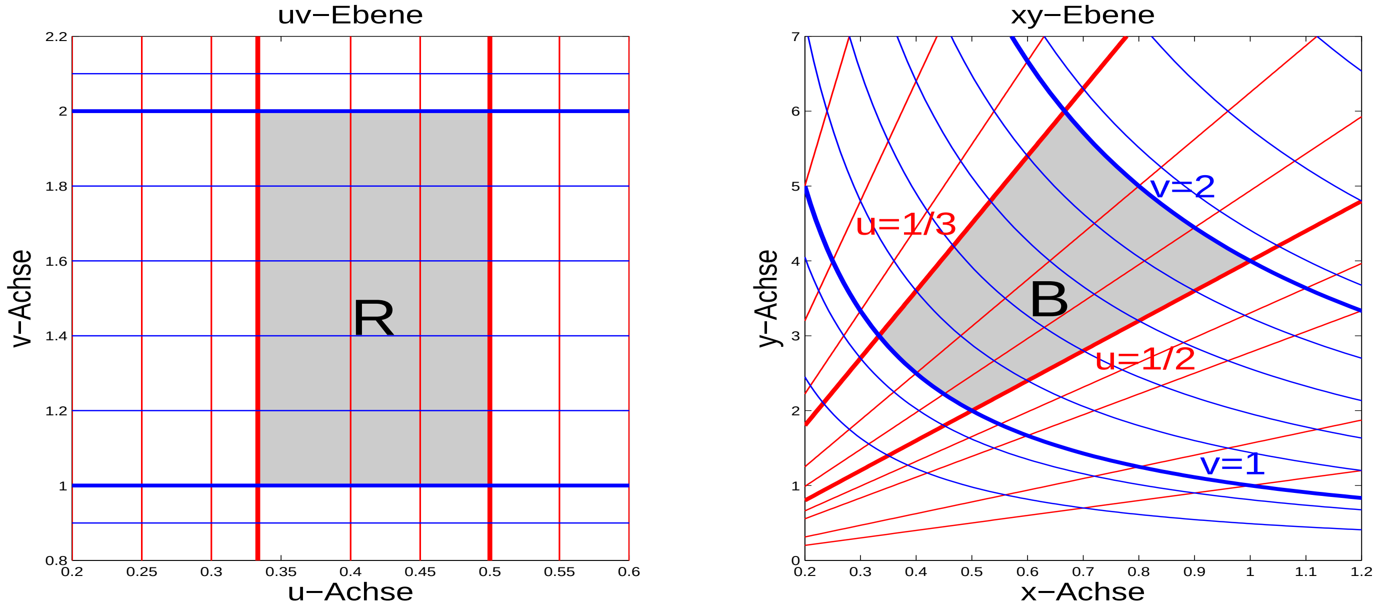
$$u = \sqrt{x/y}, \qquad v = \sqrt{xy}.$$

Eine Gerade mit $v = const$, u beliebig, wird dabei auf die Hyperbel $y = v^2/x$ abgebildet.
Eine Gerade mit $u = const$, v beliebig, wird dabei auf die Gerade $y = (1/u^2)\,x$ abgebildet.

Für den Integrationsbereich B aus der Aufgabenstellung gilt:

$$B = \vec{x}(R), \qquad R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 1/3 \le u \le 1/2,\ 1 \le v \le 2\}$$

Die Abbildung $\vec{x}$ bildet also R umkehrbar auf B ab.



2. Schritt: Berechnung der Funktionaldeterminante

Die Jacobi-Matrix der Abbildung $\vec{x}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uv \\ v/u \end{bmatrix}$ ist

$$\vec{x}\,'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} v & u \\ -v/u^2 & 1/u \end{bmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante ist daher:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(\vec{x}\,'(u,v)) = 2v/u$$

3. Schritt: Einsetzen in die Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int\int_B x^3 y\,dx\,dy &= \int\int_R (uv)^3\,(v/u)\,(2v/u)\,du\,dv = \int\int_R 2\,u\,v^5\,du\,dv \\ &= \int_1^2 \int_{1/3}^{1/2} u\,v^5\,du\,dv = 2\left(\int_{1/3}^{1/2} u\,du\right)\left(\int_1^2 v^5\,dv\right) = 35/24. \end{aligned}$$

Integration in Polarkoordinaten

Die Jacobi-Matrix der Polarkoordinatenabbildung $\vec{x}(\rho,\phi) = \begin{bmatrix} x(\rho,\phi) \\ y(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos(\phi) \\ \rho\sin(\phi) \end{bmatrix}$ ist

$$\vec{x}\,'(r,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \rho\cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante ist daher:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)} = \det(\vec{x}\,'(\rho,\phi)) = \rho$$

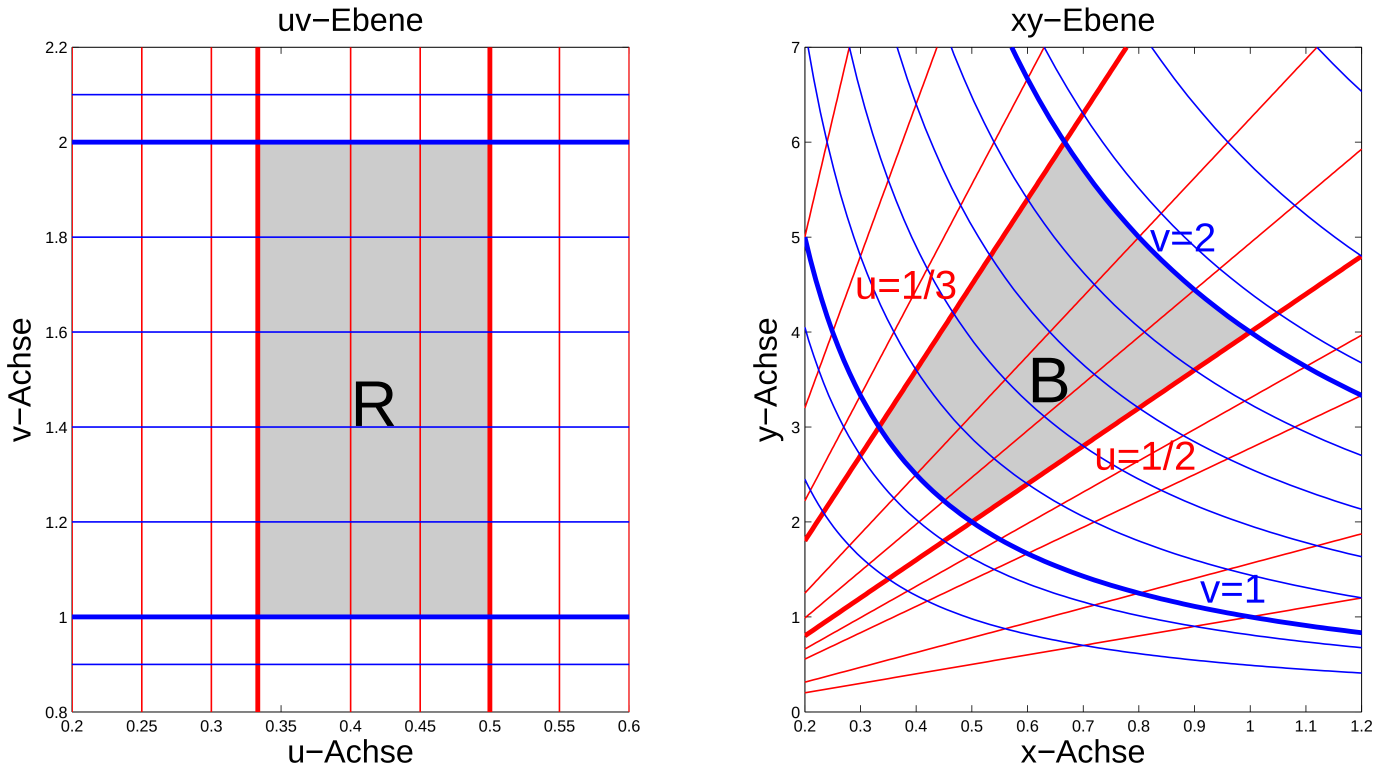
Sei $B = \vec{x}(R)$, und sei f eine in Polarkoordinaten angegebene Funktion.
Dann ergibt die Transformationsformel:

$$\int\int_B f(\rho,\phi)\,dx\,dy = \int\int_R f(\rho,\phi)\,\rho\,d\rho\,d\phi.$$

Beispiel: Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x = \rho\cos(\phi),\ y = \rho\sin(\phi),\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le \pi/2\}$ der Viertelkreis vom Radius 1. Sei $f(\rho,\phi) = (1-\rho^2)\phi$. Dann

$$\int\int_B (1-\rho^2)\phi\,dx\,dy = \int\int_R \rho^2\phi\,\rho\,d\rho\,d\phi = \int_0^1\int_0^{\pi/2} (1-\rho^2)\phi\,\rho\,d\rho\,d\phi,$$

wobei $R = \{\,(\rho,\phi) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le \pi/2\}$.


uv−Ebene
R
u−Achse
v−Achse
xy−Ebene
B
v=2
v=1
u=1/3
u=1/2
x−Achse
y−Achse

Beispiel: Berechnung der Kardioidenfläche

Wir berechnen den Flächeninhalt des Bereichs $K \subset \mathbb{R}^2$, der von der Kardioidenkurve

$$\vec{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{c}(\phi) = (1 + \cos(\phi)) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

begrenzt wird. Wir haben

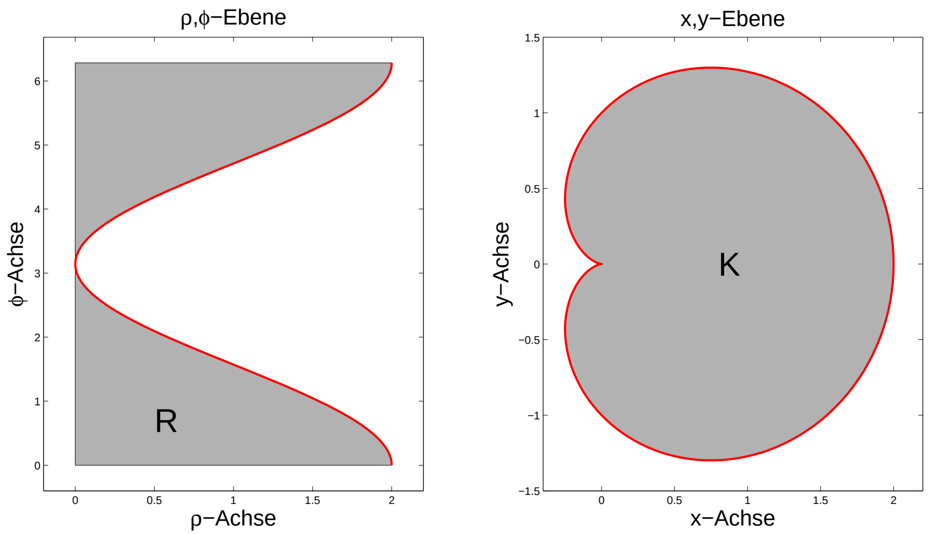
$$K \;=\; \{ \, (\underbrace{\rho\cos(\phi)}_{x}, \underbrace{\rho\sin(\phi)}_{y} \,) \in \mathbb{R}^2; \;\; \phi \in [0, 2\pi], \;\; 0 \le \rho \le 1 + \cos(\phi) \, \} \;=\; \vec{x}(R).$$

Dabei ist $\vec{x}$ die Polarkoordinatenabbildung und

$$R = \{ \, (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2; \;\; \phi \in [0, 2\pi], \;\; 0 \le \rho \le 1 + \cos(\phi) \, \}$$

Somit ist der Flächeninhalt von K,

$$\mathrm{vol}_2(K) = \int\!\!\int_K 1 \, dx \, dy = \int\!\!\int_R 1 \cdot \rho \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\phi)} \rho \, d\rho \, d\phi = \frac{3\pi}{2}.$$



Der geometrische Schwerpunkt

Der geometrische Schwerpunkt eines Gebiets $B \subset \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{x}_S = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(B)} \int\int_B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dx\,dy = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(B)} \begin{bmatrix} \int\int_B x\,dx\,dy \\ \int\int_B y\,dx\,dy \end{bmatrix}.$$

Dabei ist

$$\mathrm{vol}_2(B) = \int\int_B 1\,dx\,dy$$

der Flächeninhalt von B.

Beispiel: Geometrischer Schwerpunkt des Halbkreises

Sei

$$H = \{ (\underbrace{\rho \cos(\phi)}_{x}, \underbrace{\rho \sin(\phi)}_{y}) \in \mathbb{R}^2; \quad \phi \in [0, \pi], \quad 0 \le \rho \le r \}$$

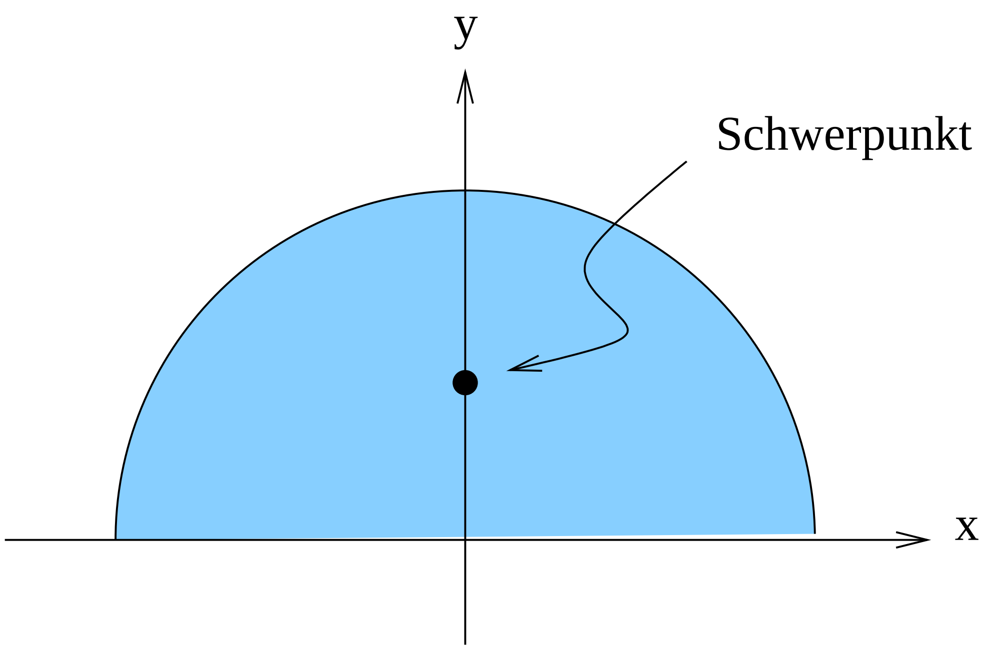
obere Halbkreis vom Radius r. Rechnung in Polarkoordinaten ergibt für die y-Koordinate des geometrischen Schwerpunkts von H:

$$\underbrace{\mathrm{vol}_2(H)}_{\pi r^2/2} \, y_s = \int\int_H y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^r y \, \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^\pi \int_0^r \sin(\phi) \, \rho^2 \, d\rho \, d\phi = 2 \, r^3/3.$$

Also:

$$y_s = \frac{4\, r}{3\, \pi}$$

Analog folgt für die x-Koordinate des Schwerpunkts: $x_s = 0$.



Transformationsformel im Dreidimensionalen

Die Transformationsformel gilt auch für 3-dimensionale Bereiche.
Die Funktionaldeterminanten sind

für Rechnung in Zylinderkoordinaten: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} = \rho$,

für Rechnung in Kugelkoordinaten: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin(\theta)$,

Beispiel: Berechnung des Volumens einer Kugel K vom Radius r in Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(K) &= \int\int\int_K 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} 1\,\rho^2 \sin(\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= [\rho^3/3]_0^r\,[-\cos(\theta)]_0^\pi\,2\pi = \frac{4}{3}\pi\,r^3.
\end{aligned}
$$

Noch einmal: das Volumen eines Rotationskörpers

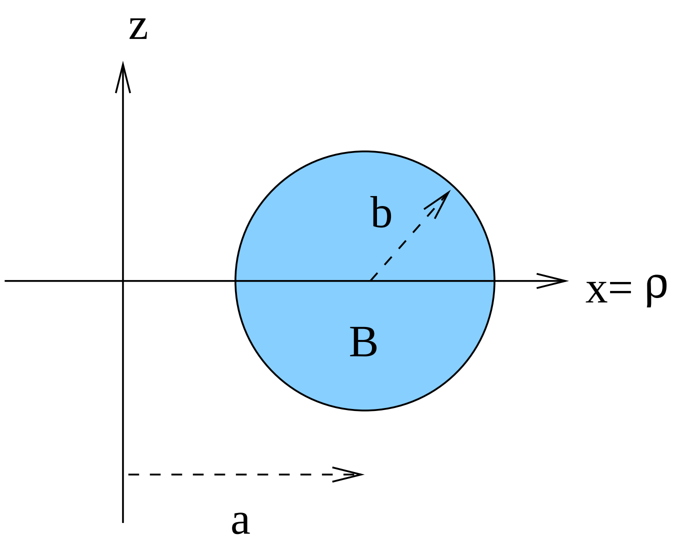
Sei B ein kompakter Bereich, der in der rechten Halbebene der (x, z)-Ebene enthalten ist. Sei K, der Körper, der entsteht, wenn man B um die z-Achse rotiert. Dann ist

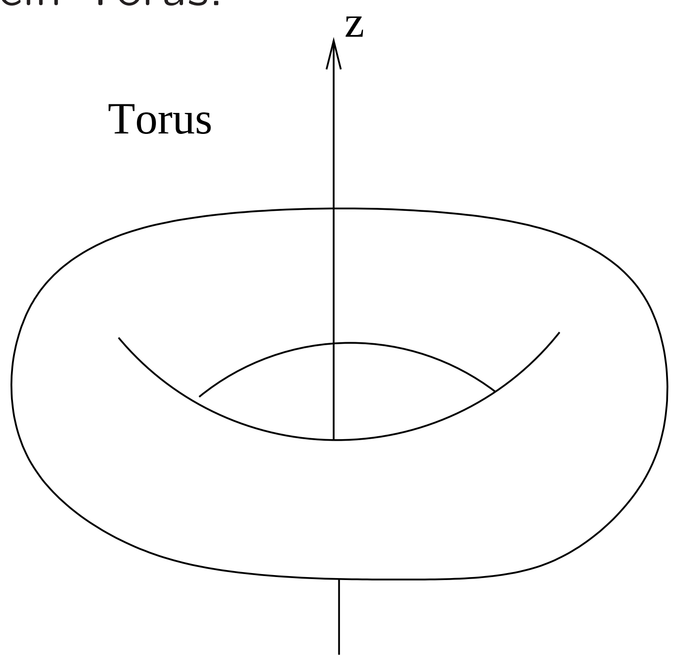
$$K = \{ (\underbrace{\rho \cos(\phi)}_{x}, \underbrace{\rho \sin(\phi)}_{y}, z); \quad (z, \rho) \in B, \ \phi \in [0, 2p] \}$$

Rechnung in Zylinderkoordinaten ergibt:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_0^{2\pi} \int \int_B \rho \, d\rho \, dz \, d\phi = 2\pi \underbrace{\int \int_B \rho \, d\rho \, dz}_{\text{Schwerpunkt} \times \mathrm{vol}_2(B)} \quad (Guldinsche Regel)$$

Wenn B ein Kreis ist, dann ist K ein Torus.





Paul Guldin
(1577-1643)

Die Guldinsche Regel ergibt für den Torus: $\mathrm{vol}_3(Torus) = 2\,\pi^2\,a\,b^2$ (siehe VL und Skript)