Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

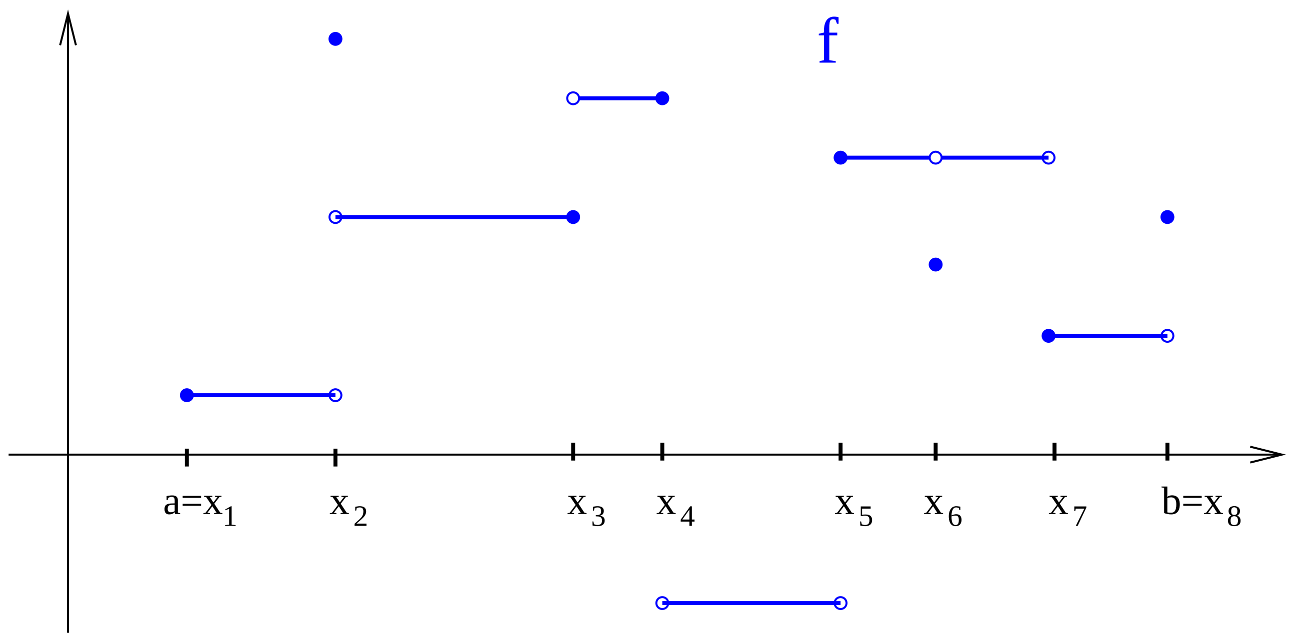
Wintersemester 07/08

Michael Karow

Thema: Definition von Gebietsintegralen, Mehrfachintegration

Treppenfunktionen auf Intervallen

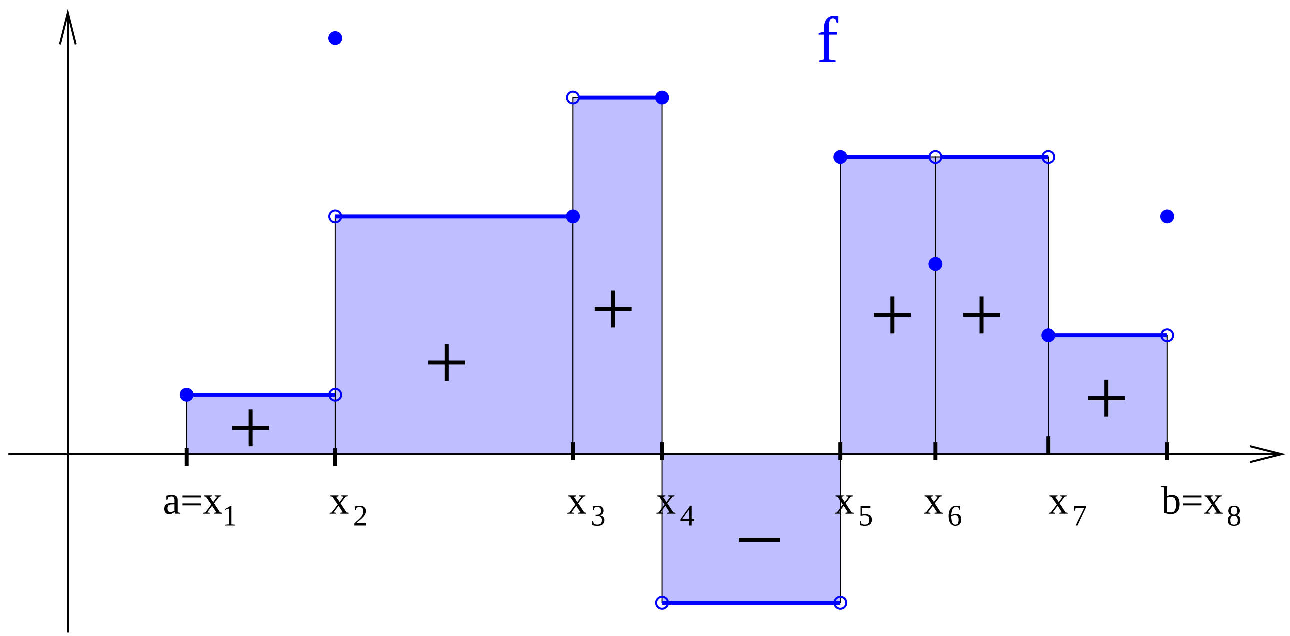
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls es eine Intervall-unterteilung $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_N = b$ gibt, so dass f auf jedem der offenen Intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ konstant ist.
(Die Werte von f an den Teilungspunkten x_k sind dabei egal.)



Das Integral einer Treppenfunktion

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit zugehörigen Teilungspunkten $x_k \in [a,b]$. Das Integral von f ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{N-1} (\text{Funktionswert auf }]x_k, x_{k+1}[\ ) \cdot (\text{Intervallänge von }]x_k, x_{k+1}[\ ) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k), \qquad \xi_k \in]x_k, x_{k+1}[.\end{aligned}$$



Definition des Integrals einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass gilt:
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existieren Treppenfunktionen $\underline{f}_k, \overline{f}_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

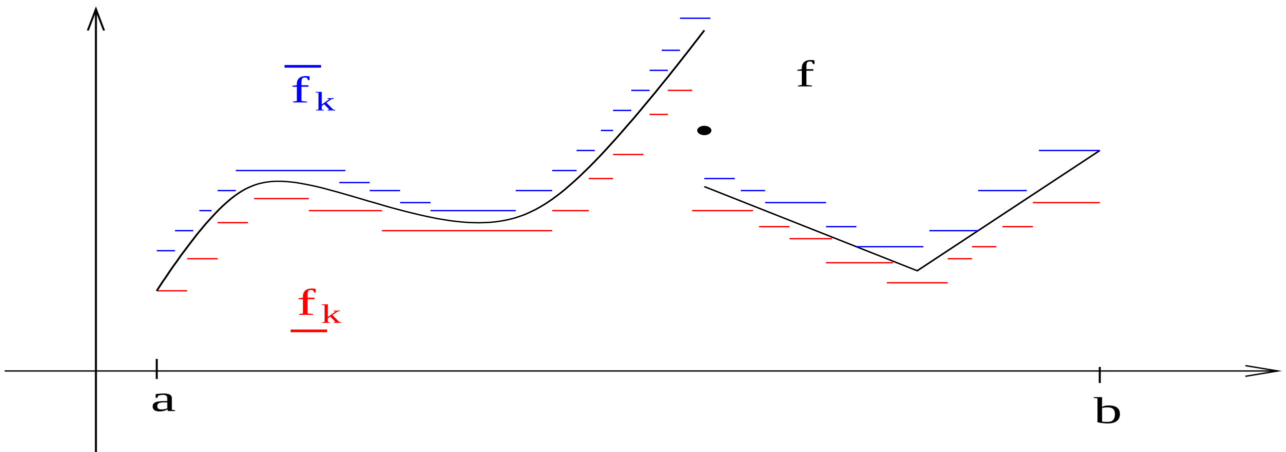
$$\underline{f}_k(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_k(x), \qquad \text{für alle } x \in [a,b]$$

und

$$\int_a^b \overline{f}_k(x)\,dx - \int_a^b \underline{f}_k(x)\,dx < \frac{1}{k}.$$

Dann definiert man das Integral von f folgendermaßen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_a^b \overline{f}_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \underline{f}_k(x)\,dx$$



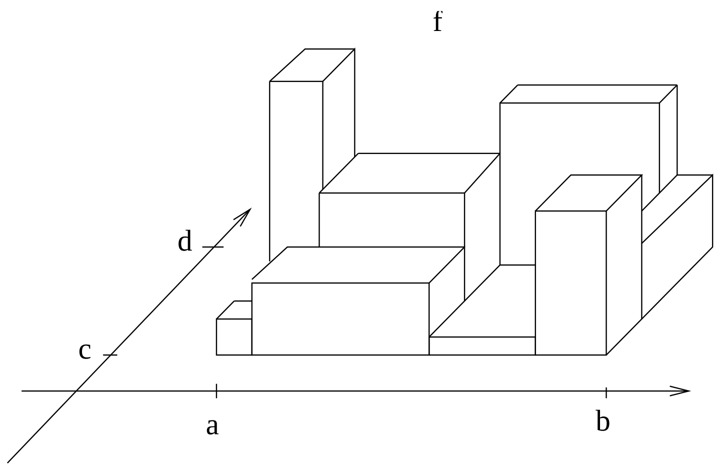
Treppenfunktionen auf Rechtecken

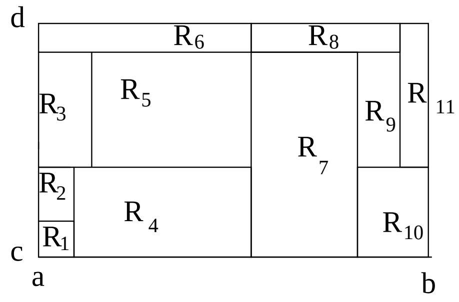
Eine auf einem Rechteck $R = [a, b] \times [c, d]$ definierte Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ heisst Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung von R in endlich viele offene Rechtecke R_k (und deren Ränder) gibt, so dass f auf jedem der Rechtecke R_k konstant ist. Das Integral einer Treppenfunktion ist

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{N} (\text{Funktionswert auf } R_k\ ) \cdot (\text{Flächeninhalt von } R_k\ )$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k\, \Delta y_k \qquad (\xi_k, \eta_k) \in R_k,$$

$$\Delta x_k, \Delta y_k = \text{Kantenlängen von } R_k$$





Definition des Integrals einer Funktion, die auf einem Rechteck definiert ist

Sei R ein Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass gilt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existieren Treppenfunktionen $\underline{f}_k, \overline{f}_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\underline{f}_k(x,y) \leq f(x,y) \leq \overline{f}_k(x,y), \qquad \text{für alle } (x.y) \in R$$

und

$$\int\int_R \overline{f}_k(x,y)\,dx\,dy - \int\int_R \underline{f}_k(x,y)\,dx\,dy < \frac{1}{k}.$$

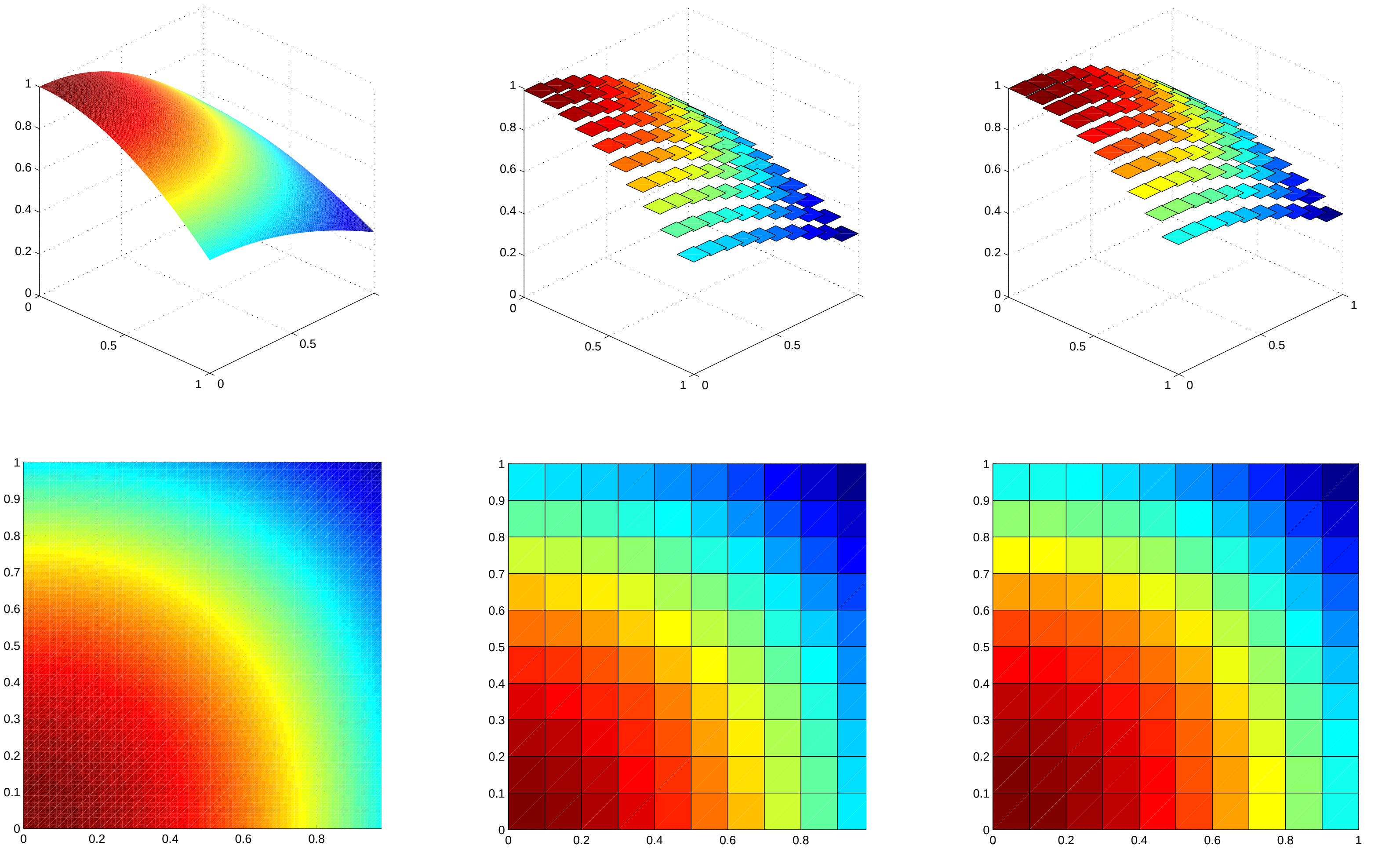
Dann definiert man das Integral von f folgendermaßen:

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy := \lim_{k\to\infty}\int\int_R \overline{f}_k(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\int\int_R \underline{f}_k(x,y)\,dx\,dy$$

Die Bilder zeigen den Graphen der Funktion

$$f : [0;1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$$

(links) und von unten bzw. oben approximierende Treppenfunktionen.



Integral=0.6688 Integral=0.7461

Definition des Integrals einer Funktion, die auf einer beschränkten Menge definiert ist

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Weil B beschränkt ist, gibt es ein Rechteck R, so dass $B \subseteq R$. Wir definieren

$$\int\int_B f(x,y)\,dx\,dy := \int\int_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei

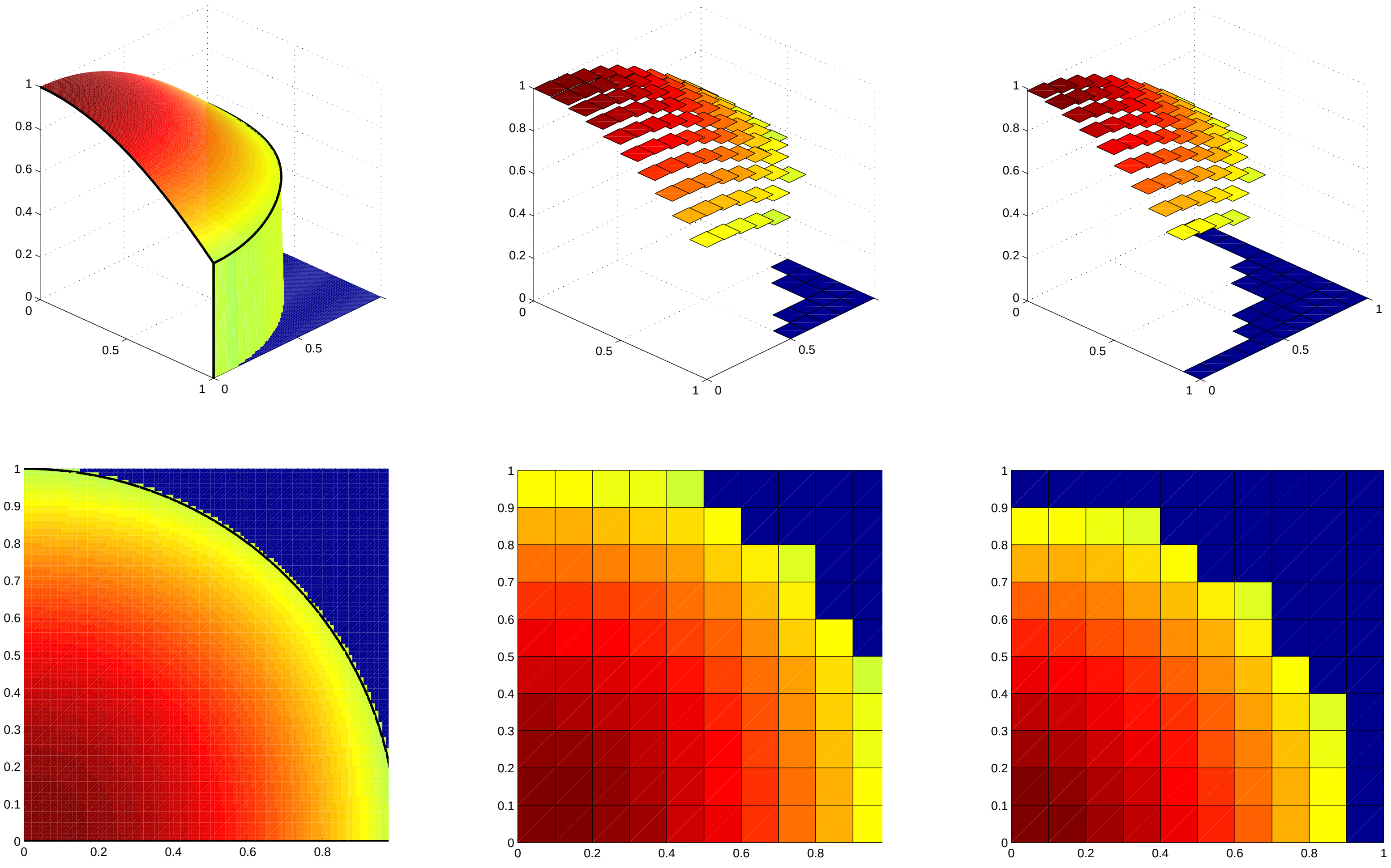
$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{falls } (x,y) \in B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Voraussetzung dabei ist natürlich, dass das Integral über R existiert.

Die Bilder zeigen den Graphen der Funktion

$$\hat{f} : [0;1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(x,y) = \begin{cases} \cos(x)\cos(y) & \text{falls } x^2 + y^2 \le 1. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(links) und von oben bzw. unten approximierende Treppenfunktionen.



Integral=6.759 Integral=5.131

Hinreichende Bedingung für Integrierbarkeit

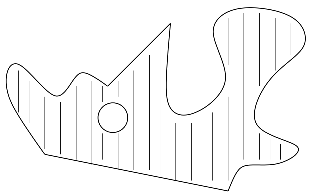
Nicht jede beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Es gilt jedoch folgendes:

Wenn B kompakt ist und stückweise glatten Rand hat, und wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in der Vereinigungsmenge der Bilder endlich vieler glatten Kurven enthalten ist, dann existiert

$$\int\int_B f(x, y)\, dx\, dy.$$

Das Integral kann dann numerisch durch **Riemannsche Summen** approximiert werden (siehe Skript). Ausserdem gelten einige sehr einleuchtende Rechenregeln (siehe Skript).

Erläuterung: Man sagt, dass der Rand einer Menge stückweise glatt ist, wenn er aus den Bildern endlich vieler differenzierbarer Kurven besteht; so wie hier:



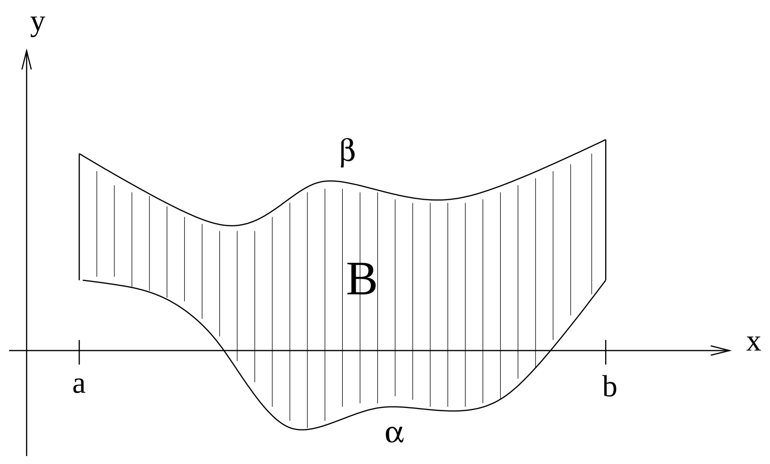
Berechnung von Gebietsintegralen durch Mehrfachintegration

Seien $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $\alpha(x) \le \beta(x), x \in [a, b]$.
Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \in [a, b],\ \ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \,\}$$

Dann gilt:

$$\int\int_B f(x, y)\, dxdy \;=\; \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$



In der Vorlesung werden hierzu die Beispiele 116 und 118 aus dem Skript vorgerechnet.

Nebenrechnung: Der Flächeninhalt eines Kreises

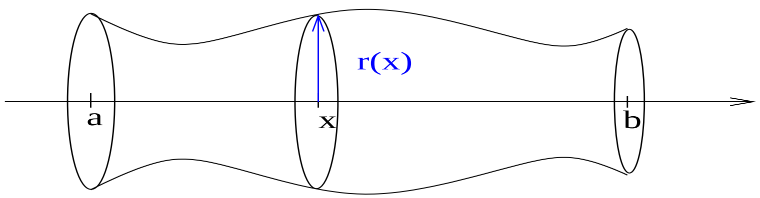
Für Beispiel 118 aus dem Skript braucht man den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r. Hier ist die Rechnung dazu:

$$
\begin{aligned}
\text{Kreisfläche} &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin(x/r)\right)\right]_{-r}^{r} \qquad \text{(siehe Bronstein)} \\
&= r^2\,(\arcsin(1)-\arcsin(-1)) \\
&= \pi\,r^2.
\end{aligned}
$$

Volumen eines Rotationskörpers

Rotationskörper (Rotationsachse ist die x-Achse):

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x \in [a,b],\ \ y^2 + z^2 \le r(x)^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x \in [a,b],\ \ -r(x) \le y \le r(x), \\ &\qquad\qquad -\sqrt{r(x)^2 - y^2} \le z \le \sqrt{r(x)^2 - y^2}\} \end{aligned}$$



Berechnung des Volumens:

$$\mathrm{Vol}(R) \;=\; \int_a^b 2 \underbrace{\int_{-r(x)}^{r(x)} \sqrt{r(x)^2 - y^2}\, dy}_{\text{Halbkreisfläche}}\, dx \;=\; \pi \int_a^b r(x)^2\, dx$$

Spezialfälle:

Zylinder vom Radius R:	$r(x) = R$
Kegel vom Radius R und Höhe h:	$a = 0,\ b = h,\ r(x) = R\,x/h$
Kugel vom Radius R:	$a = -R,\ b = R,\ r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Physikalische Anwendungsbeispiele für Gebietsintegrale

Sei $\mathcal{M}$ eine extensive physikalische Größe, z.B.

Masse, elektrische Ladung, Energie, Entropie, Stoffmenge.

Sei $\mathcal{M}(B)$ die Gesamtmenge einer solchen Grösse, die im Gebiet $B \subset \mathbb{R}^3$ enthalten ist. Dann kann man $\mathcal{M}(B)$ häufig als Integral einer Dichtefunktion f schreiben:

$$\mathcal{M}(B) = \int\int\int_B f(x, y, z)\, dxdydz$$

Für 2-dimensionale Bereiche gilt entsprechend

$$\mathcal{M}(B) = \int\int_B f(x, y)\, dxdy$$

Im Fall $f = 1$ bekommt man so das Volumen bzw. den Flächeninhalt von B.