

# **Vorlesung: Analysis II für Ingenieure**

Wintersemester 09/10

Michael Karow

*Thema: Herleitung der Transformationsformel für  
Gebietsintegrale*

Auf den folgenden Seiten wird die Transformationsformel für Gebietsintegrale

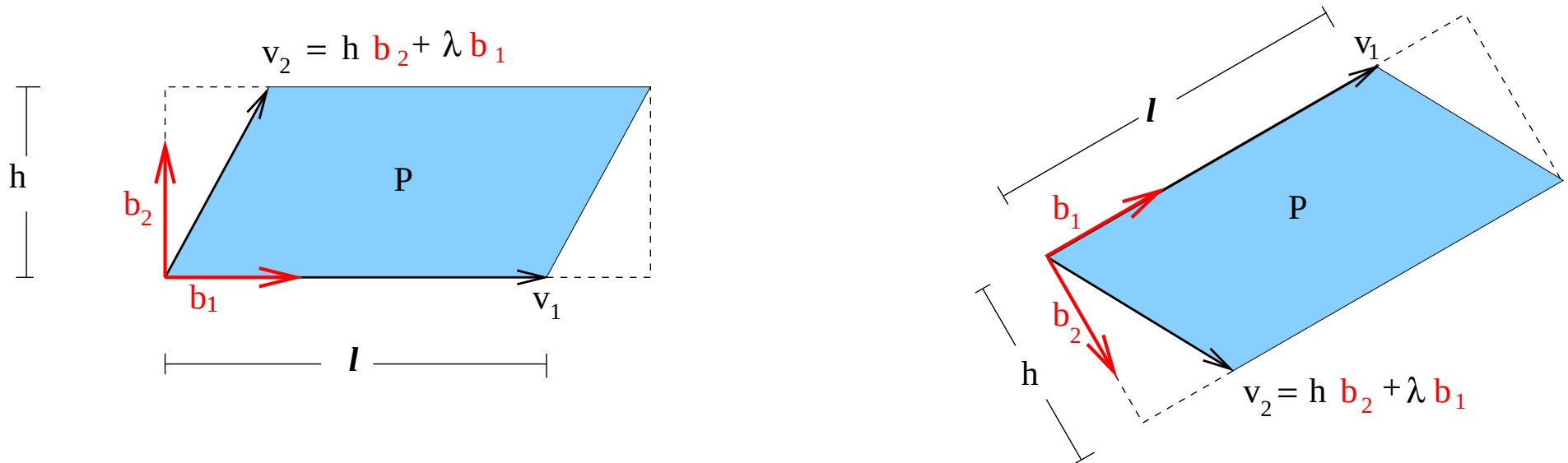
$$\int \int_B f(\vec{x}) d\vec{x} = \int \int_R f(\vec{x}(\vec{u})) |\det(\vec{x}'(\vec{u}))| d\vec{u}$$

hergeleitet. Dabei ist  $\vec{x}(\cdot)$  eine stetig differenzierbare Abbildung, die das kompakte Gebiet  $R \subset \mathbb{R}^2$  umkehrbar auf das kompakte Gebiet  $B \subset \mathbb{R}^2$  abbildet.  $\vec{x}'(\cdot)$  ist die Jacobi-Matrix von  $B$ .

# Flächeninhalt eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^2$

Sei  $P \subset \mathbb{R}^2$  ein Parallelogramm mit Kantenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Sei  $\ell$  die Länge einer Seite von  $P$  und sei  $h$  die Höhe von  $P$  über dieser Seite (siehe Bild). Dann ist der Flächeninhalt von  $P$  folgendermaßen gegeben:

$$\text{vol}_2(P) = \ell h = |\det(v_1, v_2)|. \quad (*)$$



Die Gleichung  $\text{vol}_2(P) = \ell h$  beweist man elementargeometrisch (Man schneidet von  $P$  ein Dreieck ab und legt es auf der anderen Seite an. Dann entsteht ein Rechteck mit Flächeninhalt  $\ell h$ .)

Zum Beweis der 2. Gleichung von  $(*)$  wählt man zueinander senkrechte Einheitsvektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ , so dass  $\vec{v}_1 = \ell \vec{b}_1, \vec{v}_2 = h \vec{b}_2 + \lambda \vec{b}_1$ .

Weil zueinander Einheitsvektoren stets von der Form  $\vec{b}_1 = [\cos(\phi) \ \sin(\phi)]^T$ , und  $\vec{b}_2 = \pm[-\sin(\phi) \ \cos(\phi)]^T$ , sind, hat man  $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \pm 1$ .

Mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten folgt:

$$\det(v_1, v_2) = \det(\ell \vec{b}_1, h \vec{b}_2 + \lambda \vec{b}_1) = \ell h \underbrace{\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2)}_{=\pm 1} + \ell \lambda \underbrace{\det(\vec{b}_1, \vec{b}_1)}_{=0} = \ell h(\pm 1).$$

# Transformation eines Rechtecks durch eine affin-lineare Abbildung

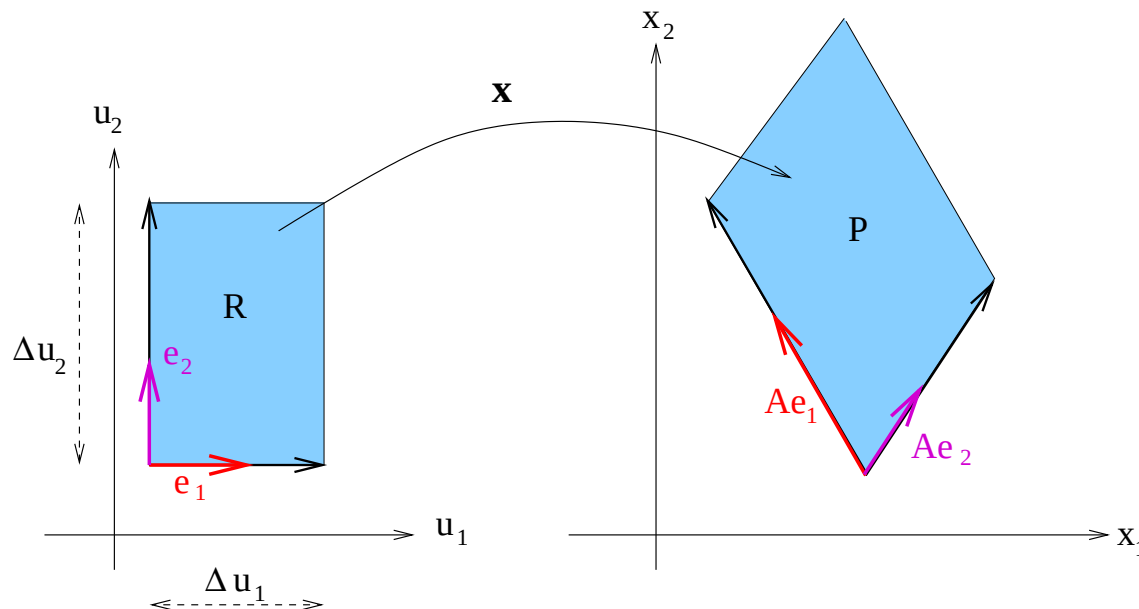
Sei  $\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die affin linear, also

$$\vec{x}(\vec{u}) = A\vec{u} + \vec{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \text{ (fest gewählt)}$$

Wenn  $\det(A) \neq 0$ , dann bildet  $\vec{x}$  ein achsenparalleles Rechteck  $\mathbf{R}$  mit Kantenvektoren  $\Delta u_1 \vec{e}_1$ ,  $\Delta u_2 \vec{e}_2$  auf ein Parallelogramm  $\mathbf{P}$  mit Kantenvektoren  $\Delta u_1 A\vec{e}_1$ ,  $\Delta u_2 A\vec{e}_2$  ab. Dabei sind  $\vec{e}_1 = [1 \ 0]^T$ ,  $\vec{e}_2 = [0 \ 1]^T$  die kanonischen Basisvektoren. Nach linearer Algebra ist  $A\vec{e}_1$  die erste Spalte von  $A$  und  $A\vec{e}_2$  die zweite Spalte von  $A$ . Folglich hat man für die Flächeninhalte

$$\text{vol}_2(\mathbf{P}) = |\det(\Delta u_1 A\vec{e}_1, \Delta u_2 A\vec{e}_2)| = |\det(\underbrace{A\vec{e}_1, A\vec{e}_2}_{=A})| \underbrace{\Delta u_1 \Delta u_2}_{=\text{vol}_2(\mathbf{R})} = |\det(A)| \text{vol}_2(\mathbf{R})$$

In Worten: Wenn man den Flächeninhalt von  $\mathbf{R}$  mit dem Faktor  $|\det(A)|$  multipliziert, dann erhält man den Flächeninhalt von  $\mathbf{P} = \vec{x}(\mathbf{R})$ .



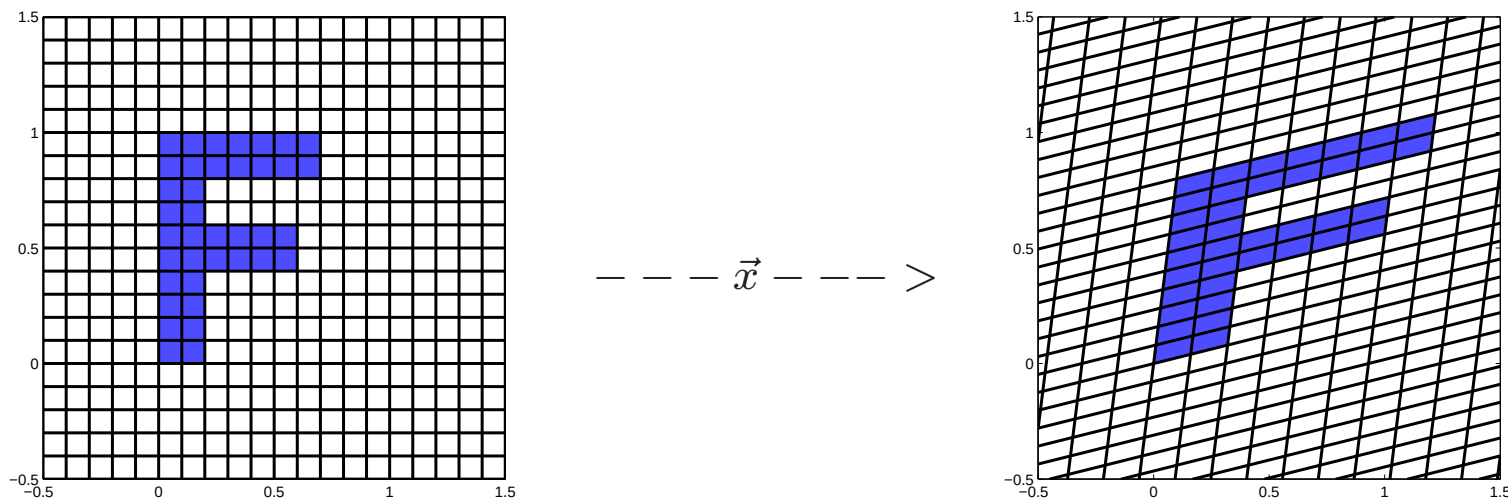
# Transformation einer Figur durch eine affin-lineare Abbildung

Sei  $\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die affin linear, also

$$\vec{x}(\vec{u}) = A\vec{u} + \vec{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \text{ (fest gewählt)}$$

Wenn  $\det(A) \neq 0$ , dann bildet  $\vec{x}$  Rechtecke auf Parallelogramme ab. Der Flächeninhalt eines Gebiets (hier der Buchstabe F) wird durch die Abbildung mit  $|\det(A)|$  multipliziert:

$$\text{vol}_2(\vec{x}(F)) = |\det(A)| \text{vol}_2(F). \quad (*)$$



Gleichung (\*) in Integralschreibweise:

$$\int \int_{\vec{x}(F)} 1 \, dx dy = \text{vol}_2(\vec{x}(F)) = |\det(A)| \text{vol}_2(F) = |\det(A)| \int \int_F 1 \, du dv = \int \int_F |\det(A)| \, du dv.$$

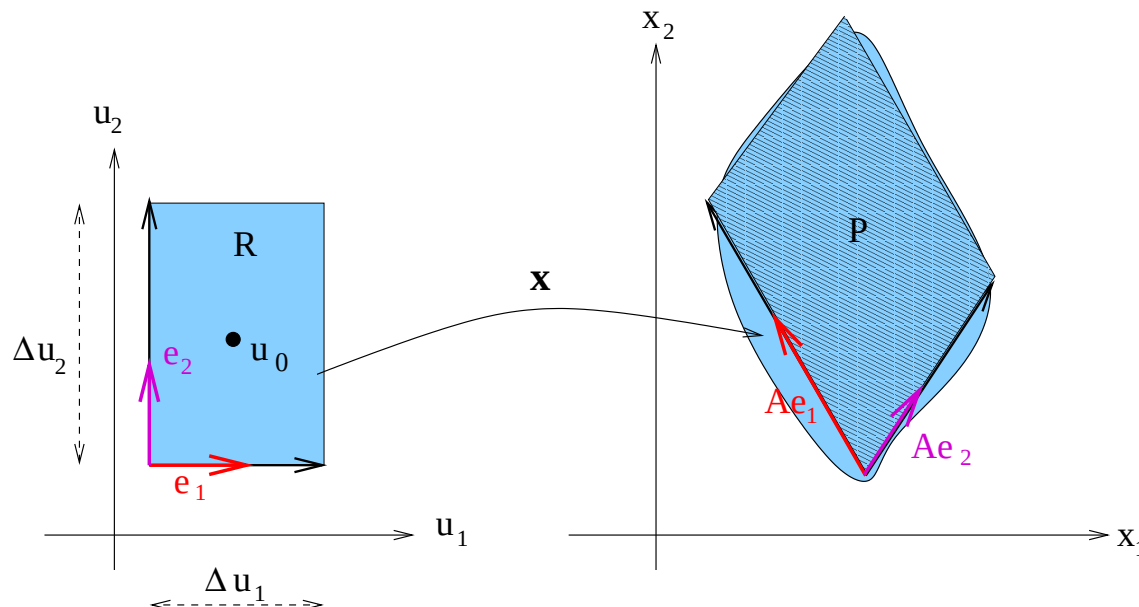
# Gebietstransformation bei einer nichtlinearen Abbildung

Sei  $\vec{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei  $\vec{u}_0$  ein Punkt aus  $B$  und sei  $A = \vec{x}'(\vec{u}_0)$  (Jacobi-Matrix). Dann gilt (Taylorentwicklung bzw. Definition von  $\vec{x}'$ ):

$$\vec{x}(\vec{u}) = \underbrace{\vec{x}(\vec{u}_0) + A(\vec{u} - \vec{u}_0)}_{\text{affin-linearer Anteil}} + \text{Rest}(\vec{u} - \vec{u}_0).$$

Dabei wird der Rest beliebig klein im Vergleich zum affin-linearen Anteil, wenn  $\vec{u} - \vec{u}_0$  hinreichend klein ist. Ein Rechteck  $R$  um  $u_0$  mit Flächeninhalt  $\text{vol}_2(R)$  wird durch den affin-linearen Anteil auf ein Parallelogramm  $P$  mit Flächeninhalt  $\text{vol}_2(P) = |\det(A)| \text{vol}_2(\mathbf{R})$  abgebildet. Wenn  $R$  hinreichend klein ist, dann unterscheidet sich das Bild von  $R$  unter der Transformation  $\vec{x}$  nur sehr wenig von  $P$ . Folglich gilt für kleine Rechtecke:

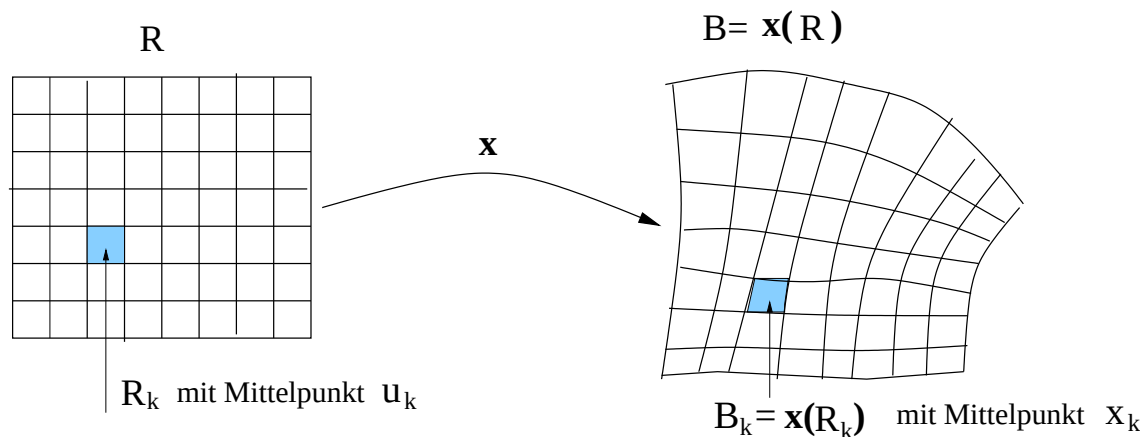
$$\text{vol}_2(\vec{x}(R)) \approx \text{vol}_2(P) = |\det(\vec{x}'(\vec{u}_0))| \text{vol}_2(\mathbf{R})$$



# Transformation von Gebietsintegralen

Sei  $\vec{x} : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Abbildung, die  $R$  umkehrbar auf  $B = \vec{x}(R)$  abbildet. Zerlege nun  $R$  in (sehr) kleine Rechtecke  $R_k$  mit Mittelpunkten  $\vec{u}_k$ . Dann zerfällt  $B$  in parallelogramm-ähnliche Gebiete  $B_k = \vec{x}(R_k)$  mit Mittelpunkten  $\vec{x}_k = \vec{x}(\vec{u}_k)$ . Nach dem Resultat auf der vorigen Seite ist

$$\text{vol}_2(B_k) \approx |\det(\vec{x}'(\vec{u}_k))| \text{vol}_2(R_k)$$



Sei nun  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int \int_B f(\vec{x}) d\vec{x} &= \sum_k \int \int_{B_k} f(\vec{x}) d\vec{x} \approx \sum_k f(\vec{x}_k) \text{vol}_2(B_k) \\ &\approx \sum_k f(\vec{x}_k) |\det(\vec{x}'(\vec{u}_k))| \text{vol}_2(R_k) \approx \int \int_R f(\vec{x}(u)) |\det(\vec{x}'(\vec{u}))| d\vec{u}. \end{aligned}$$

Die Näherungen werden umso genauer, je feiner die Zerlegung in Rechtecke  $R_k$  ist.

**Ende der Herleitung der Transformationsformel.**

# Gebietstransformation durch die Polarkoordinatenabbildung

Folgendes Bild illustriert, wie die Polarkoordinatenabbildung

$$(\rho, \phi) \mapsto (x(\rho, \phi), y(\rho, \phi)) = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi))$$

Gebiete transformiert.

