

Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

Wintersemester 09/10

Michael Karow

Themen: Flächen und Flächenintegrale

Parametrisierte Flächen I

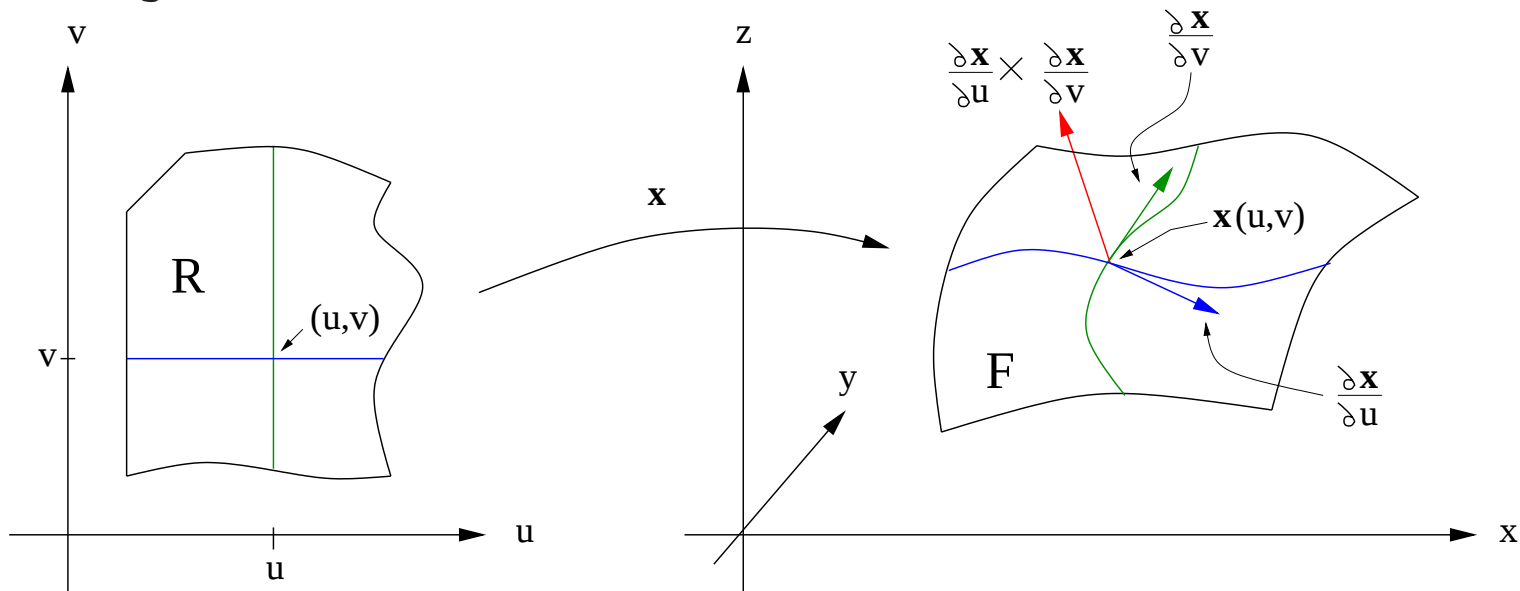
Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit stückweise glattem Rand (d.h. der Rand ist aus glatten Kurven zusammengesetzt). Sei

$$\vec{x} : R \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \vec{x}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

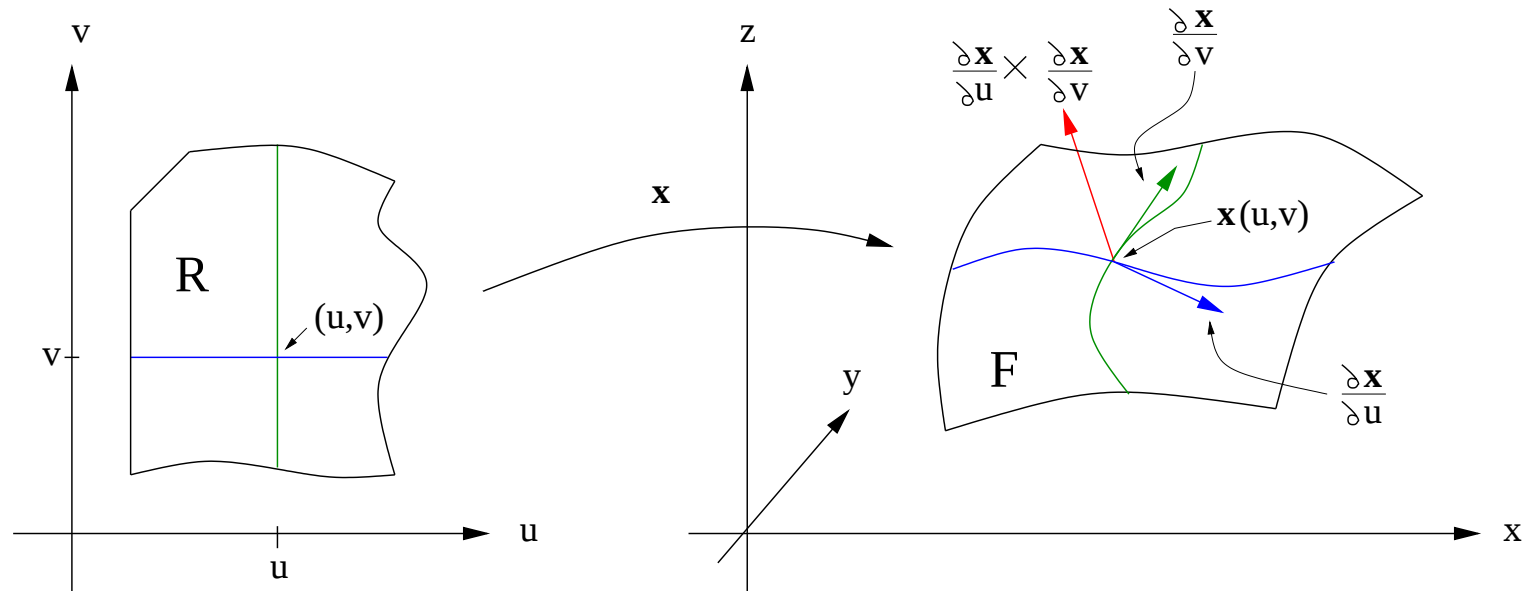
eine stetig diff'bare Abbildung, die R auf $F \subset \mathbb{R}^3$ abbildet, wobei folgendes gilt:

- Die Zuordnung $R \ni (u, v) \xrightarrow{\vec{x}} (x, y, z) \in F$ ist bis auf eventuelle Ausnahmen auf dem Rand von R umkehrbar.
- Bis auf eventuelle Ausnahmen auf dem Rand von R sind die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v)$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v)$ stets linear unabhängig.

Dann nennt man F eine glatte Fläche, und die Abbildung $\vec{x}$ nennt man eine Parametrisierung von F .



Parametrisierte Flächen II



In der Situation der vorigen Seite gilt:

- Die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v)$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v)$ spannen die **Tangentialebene** von F am Punkt $\vec{x}(u, v)$ auf. Der Vektor $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v)$ (Kreuzprodukt) steht senkrecht auf der Tangentialebene.
- Ein kleines achsenparalleles Rechteck in R mit Mittelpunkt (u, v) und Kantenlängen Δu , Δv wird durch $\vec{x}$ näherungsweise auf ein Parallelogramm P mit Mittelpunkt $\vec{x}(u, v)$ und den Kantenvektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v) \Delta u$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v) \Delta v$ abgebildet. Der **Flächeninhalt von P** ist

$$\text{vol}_2(P) = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u, v) \right| \Delta u \Delta v.$$

Der Vektor $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ enthält also die Informationen über die Lage der Tangentialebene und die Umrechnung von Flächeninhalten.

Differentielle Flächenelemente und Oberflächenintegrale

vektorielles Flächenelement: $d\vec{O} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} du dv$

skalares Flächenelement: $dO = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv.$

Für eine Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das **skalare Oberflächenintegral**:

$$\int \int_F f dO := \int \int_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv.$$

Das Integral über R muss natürlich sinnvoll sein. Die ist z.B. für stetiges f der Fall.

Für eine Vektorfeld $\vec{v} : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das **Flussintegral**:

$$\int \int_F \vec{v} \cdot d\vec{O} := \int \int_R \underbrace{\vec{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)}_{\substack{= \det(\vec{v}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}) \\ (*)}} du dv.$$

Interpretation:

Wenn $\vec{v}$ ein Geschwindigkeitsfeld ist, dann gibt das Flussintegral an, welches Volumen des strömenden Mediums sich pro Zeiteinheit in Richtung $d\vec{O}$ durch die Fläche F bewegt.

Die Gleichung (*) gilt aufgrund der vektoriellen Identität

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \quad (\textbf{Spatprodukt})$$

Flächeninhalt und Flussintegral als skalares Oberflächenintegral

1) Den Flächeninhalt von F bekommt man, indem man das skalare Oberflächenintegral mit der Funktion $f = 1$ bildet:

$$\text{vol}_2(F) = \int \int_F dO = \int \int_R \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv$$

2) Sei $\vec{n}$ der Einheitsvektor, der in dieselbe Richtung wie $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ zeigt. Dann ist

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| \vec{n}.$$

Aus den Definitionen der Oberflächenintegrale folgt dann

$$\int \int_F \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO.$$

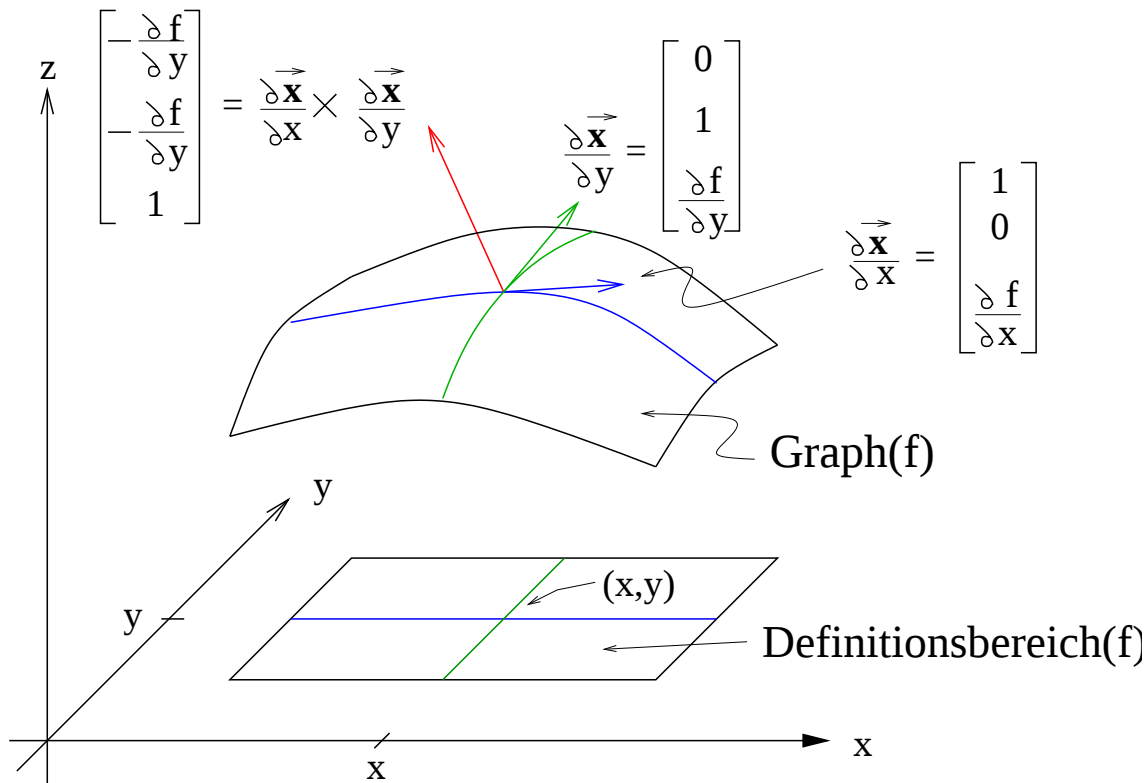
Das Flussintegral ist also das skalare Oberflächenintegral der Funktion $f = \vec{v} \cdot \vec{n}$.

Graphenflächen: Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$\vec{x} : R \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$$

eine Parametrisierung des Graphen von f . Man hat eine Situation wie im Bild unten.
Für die Oberflächenelemente gilt

$$d\vec{O} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} dx dy, \quad dO = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$



Beispiel: Fluss eines in z -Richtung zeigenden Vektorfeldes durch einen Graphen (siehe Skript Beispiel 142).

Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar und

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = [0 \ 0 \ v_z(x, y)]^T$$

ein stetiges Vektorfeld. (Beachte: v_z hängt nicht von z ab). Der Fluss von $\vec{v}$ durch den Graphen von f ist

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Graph}(f)} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iint_R \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ v_z & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \right) dx dy \\ &= \iint_R \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & v_z \end{bmatrix} \right) dx dy \quad (\text{Zyklisches Vertauschen der Spalten}) \\ &= \iint_R v_z(x, y) dx dy \end{aligned}$$

(Dreiecksmatrix. Determinante ist Produkt der Diagonalelemente)

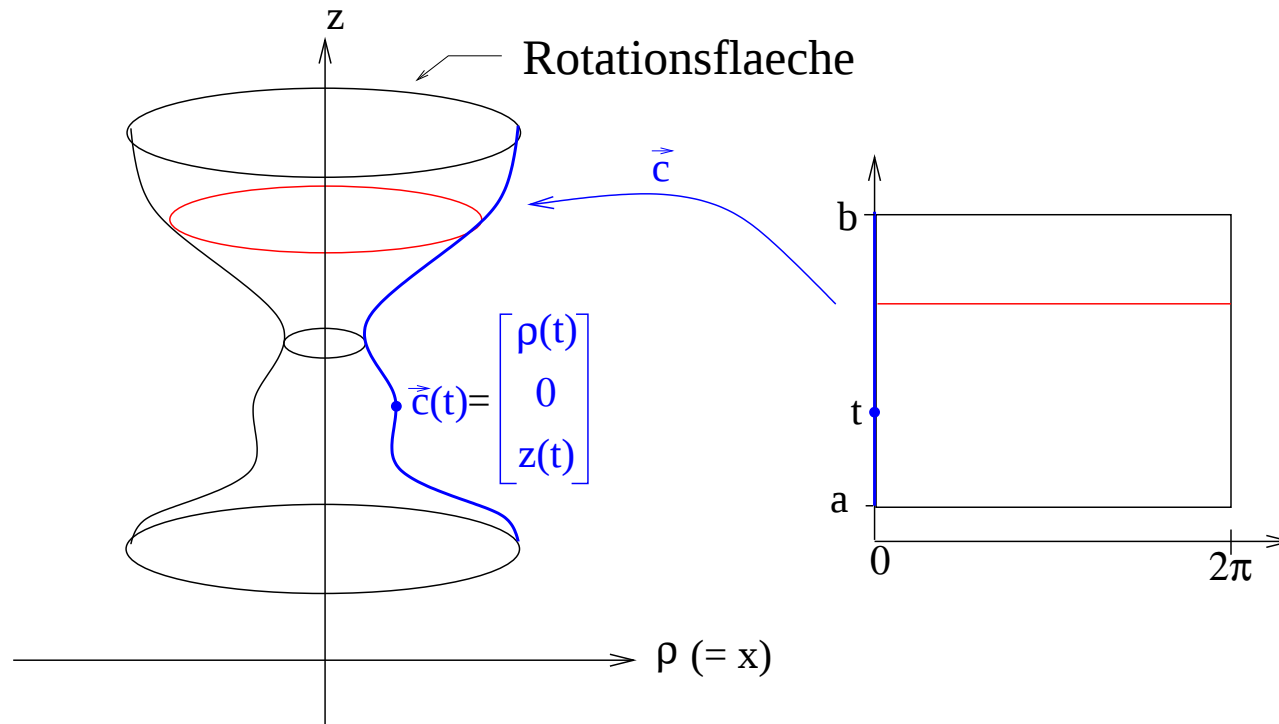
Rotationsflächen I. Sei

$$\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}(t) = \begin{bmatrix} \rho(t) \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix}$$

eine differenzierbare Kurve, so dass die ganz in der rechten Hälfte der x, z -Ebene enthalten ist. Ausserdem sei $|\vec{c}'(t)| \neq 0$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen. $\vec{c}$ darf auch geschlossen sein und endlich viele Selbstüberschneidungen haben. Dann ist

$$\vec{x}: [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(\phi, t) := \rho(t) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(t) \cos(\phi) \\ \rho(t) \sin(\phi) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

eine Parametrisierung der Rotationsfläche F , die entsteht, wenn man das Bild von $\vec{c}$ vollständig um die z -Achse dreht. Geometrische Bedeutung von ρ : Abstand von der z -Achse. Die Oberflächenelemente etc. sind auf der folgenden Seite angegeben.



Rotationsflächen II. Für die Parametrisierung der Rotationsfläche F hat man

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = \rho(t) \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \rho'(t) \cos(\phi) \\ \rho'(t) \sin(\phi) \\ z'(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \rho(t) \begin{bmatrix} \cos(\phi) z'(t) \\ \sin(\phi) z'(t) \\ -\rho'(t) \end{bmatrix}$$

Die Oberflächenelemente sind

$$d\vec{O} = \rho(t) \begin{bmatrix} \cos(\phi) z'(t) \\ \sin(\phi) z'(t) \\ -\rho'(t) \end{bmatrix} dt d\phi, \quad dO = \rho(t) \sqrt{z'(t)^2 + \rho'(t)^2} dt d\phi.$$

Sei ds das differentielle Längenelement von $\vec{c}$ (siehe Vorlesung über Kurvenintegrale). Dann ist

$$ds = |c'(t)| dt = \sqrt{z'(t)^2 + \rho'(t)^2} dt$$

Daher kann man das skalare Oberflächenelement von F kurz in folgender Form schreiben:

$$dO = \rho ds d\phi.$$

Dabei ist ρ der Abstand zur z -Achse.

Spezialfall (siehe Skript): Wenn das Bild von $\vec{c}$ der Graph einer Funktion von z ist, also $z = t$, $\rho = \rho(z)$, dann hat man

$$dO = \rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2} dz d\phi.$$

Rotationsflächen III.

Für den Flächeninhalt einer Rotationsfläche F bekommt man von der vorigen Seite:

$$\text{vol}_2(F) = \int \int_F dO = \int \int_F \rho \, ds \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\vec{c}} \rho \, ds \right) d\phi = 2\pi \int_{\vec{c}} \rho \, ds$$

Wenn man den geometrischen Schwerpunkt einer Kurve analog zu dem geometrischen Schwerpunkt eines ebenen oder 3-dimensionalen Bereichs definiert, dann ist

$$\rho_s = \int_{\vec{c}} \rho \, ds \Big/ (\text{Länge von } \vec{c}) = \int_{\vec{c}} \rho \, ds \Big/ \int_{\vec{c}} ds$$

der Abstand des Schwerpunkts von $\vec{c}$ von der z -Achse.

Es folgt die **Guldinsche Regel**:

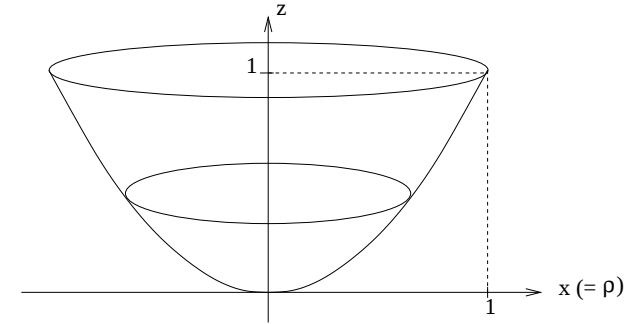
$$\text{vol}_2(F) = 2\pi \cdot (\text{Länge von } \vec{c}) \cdot (\text{Abstand des Schwerpunkts von } \vec{c} \text{ von der } z\text{-Achse})$$

Diese Form der Flächeninhaltsformel ist bequem, wenn der Schwerpunktsabstand bekannt ist. **Beispiele:**

- *Mantel eines Kegelstumpfs.* In diesem Fall ist das Bild von $\vec{c}$ eine Strecke. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Strecke.
- *Oberfläche eines Torus.* In diesem Fall ist das Bild von $\vec{c}$ eine Kreislinie. Der Schwerpunkt ist der Kreismittelpunkt.

Beispiel: Berechnung des Flächeninhalts des Rotationsparaboloids

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = x^2 + y^2 \}.$$



Methode 1: Die Menge P ist der Graph der Funktion

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad K = \text{Einheitskreis}.$$

Mit der Formel für das Oberflächenelement eines Graphen und Integration in Polarkoordinaten bekommt man:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P) &= \int \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int \int_K \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\phi = 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Methode 2: P ist die Rotationsfläche, die man durch Drehen des Graphen der Funktion $[0, 1] \ni z \mapsto \sqrt{z} = \rho(z)$ erhält. Mit der Formel über den Flächeninhalt der Rotationsfläche eines Graphen folgt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P) &= 2\pi \int_0^1 \rho(z) \sqrt{1 + \rho'(z)^2} dz = 2\pi \int_0^1 \sqrt{z} \sqrt{1 + 1/(4z)} dz = 2\pi \int_0^1 \sqrt{z + 1/4} dz \\ &= 2\pi \left[(2/3) (z + 1/4)^{3/2} \right]_0^1 = 2\pi (2/3) ((5/4)^{3/2} - (1/4)^{3/2}) \\ &= 2\pi (2/3) (5^{3/2} - 1)/8 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$