Vorlesung: Analysis II für Ingenieure

Wintersemester 07/08

Michael Karow

Themen: Lineare und nichtlineare Abbildungen,

Differenzierbarkeit

Einer lineare Abbildung $x \longmapsto Ax$ bildet Geraden auf Geraden oder Punkte ab.

Erläuterung: Die Gerade durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$ mit

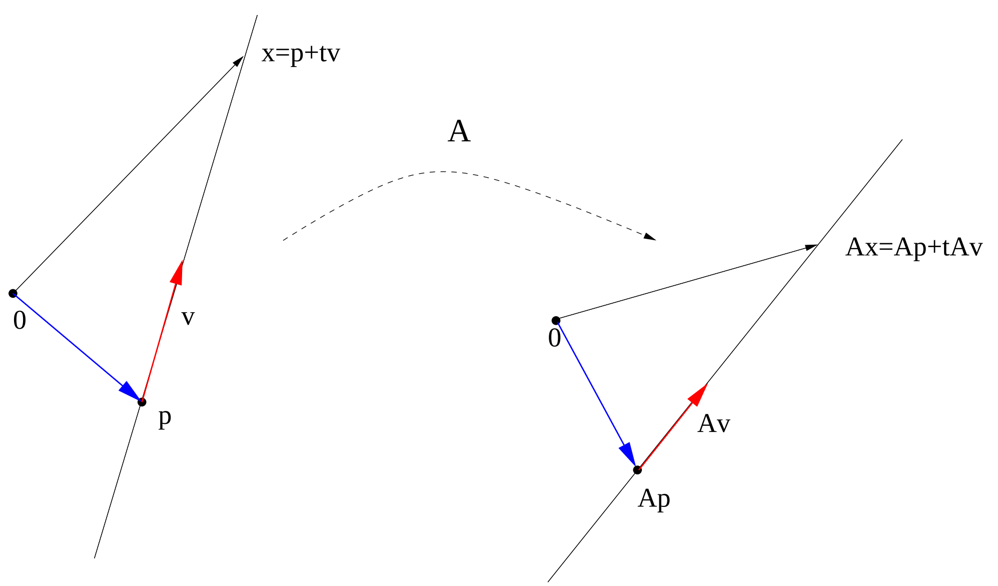
$$x = p + t\,v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Multipliziert man alle x auf der Geraden mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann bekommt man die Menge aller

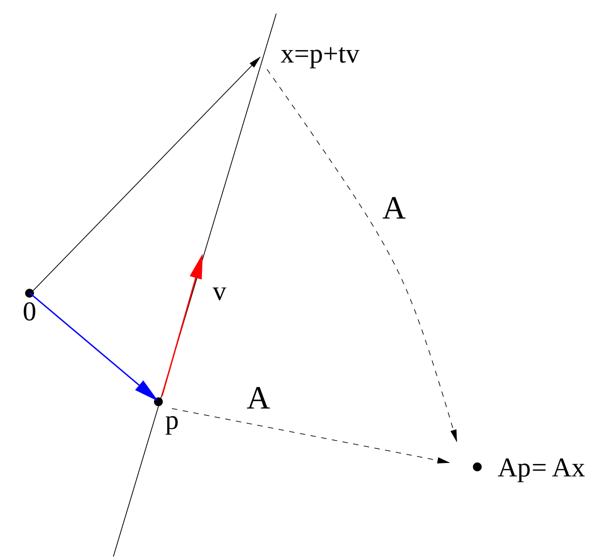
$$Ax = Ap + t\,Av, \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Dies ist die Gerade durch den Punkt Ap mit Richtungsvektor Av, es sei denn $Av = 0$. In diesem Fall ist die Bildmenge $(**)$ nur der Punkt Ap.

Situation wenn Av ≠0:



Situation wenn Av=0:



Bemerkung: Der Fall $v \neq 0$ und $Av = 0$ kommt nicht vor, wenn A invertierbar ist.

Einer lineare Abbildung $x \longmapsto Ax$ bildet zueinander parallele Geraden auf auf zu einander parallele Geraden oder Punkte ab.

Erläuterung: Zwei Geraden sind zu einander parallel, wenn sie denselben Richtungsvektor haben (oder die Richtungsvektoren Vielfache von einander sind), z.B.

$$\text{Gerade 1:} \qquad x_1 = p_1 + t\,v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

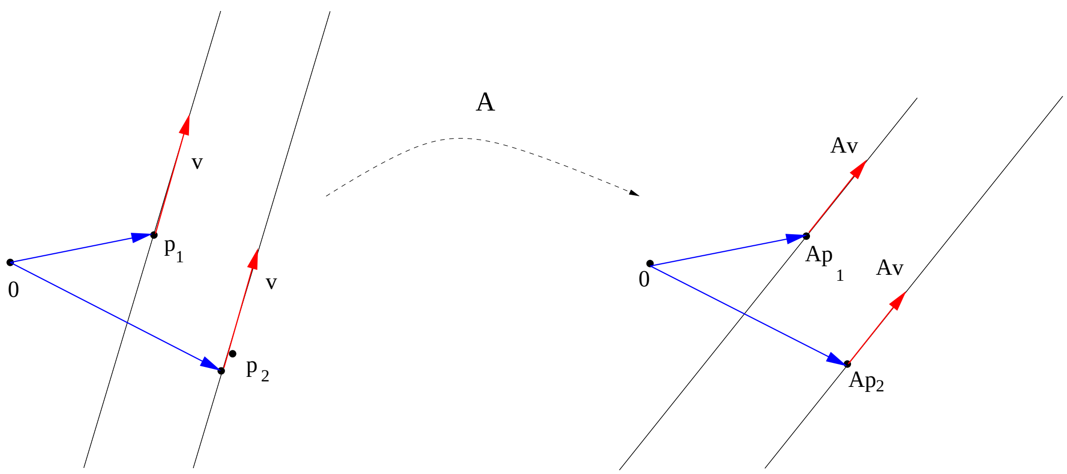
$$\text{Gerade 2:} \qquad x_2 = p_2 + t\,v, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Die Bildgeraden sind

$$\text{Bildgerade 1:} \qquad Ax_1 = Ap_1 + t\,Av, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Bildgerade 2:} \qquad Ax_2 = Ap_2 + t\,Av, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

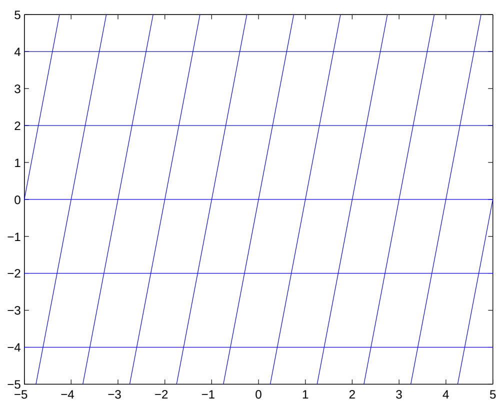
Die Richtungsvektoren der Bildgeraden sind wieder gleich. Die Bildgeraden sind also auch parallel.



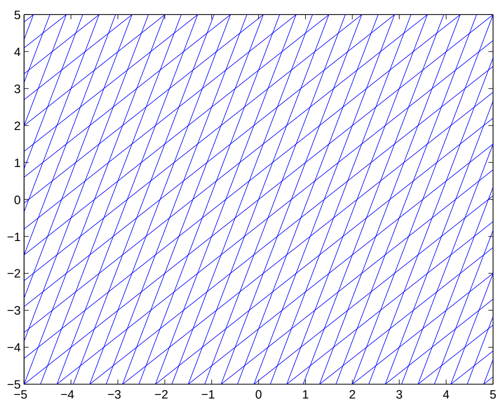
Weitere Tatsache: Geht eine Gerade durch 0, dann geht auch die Bildgerade durch 0.

Folgerung aus den bisher genannten Tatsachen:

Eine invertierbare lineare Abbildung $x \mapsto Ax, x \in \mathbb{R}^n$,
macht aus einem Gitter paralleler Geraden wieder ein Gitter paralleler Geraden.



$$\xrightarrow{\quad A \quad}$$



Das lineare Bild des Einheitsgitters

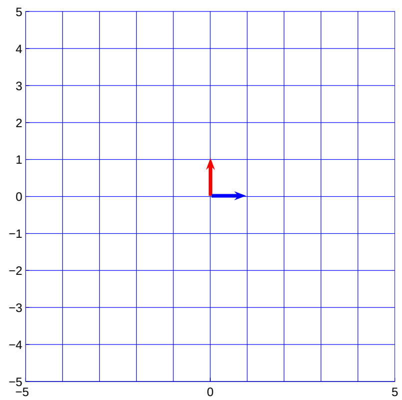
Das Bild des Einheitsgitters kann man direkt an der Matrix ablesen.

Es gilt nämlich: **Die Spalten von A sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren.**

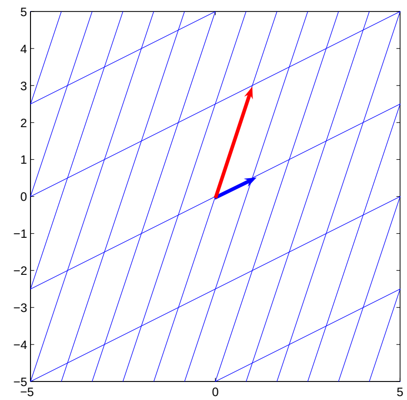
Im 2×2 Fall:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Illustration:



$$\xrightarrow{\quad A \quad}$$

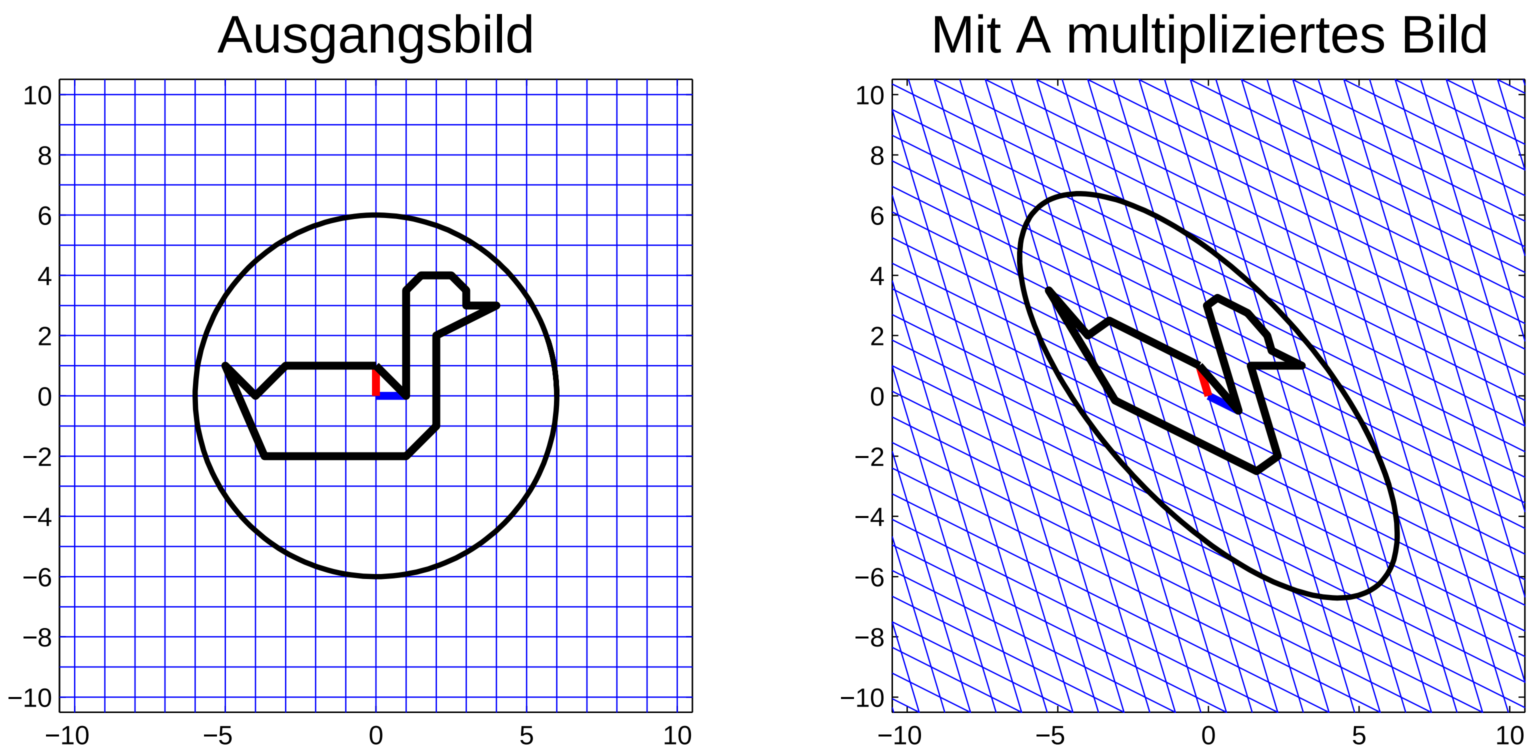


Linkes Bild: Einheitsgitter mit den kanonischen Basisvektoren

Rechtes Bild: Das A-Bild des Einheitsgitters mit den A-Bildern der Basisvektoren.

Die Matrix in diesem Beispiel ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$.

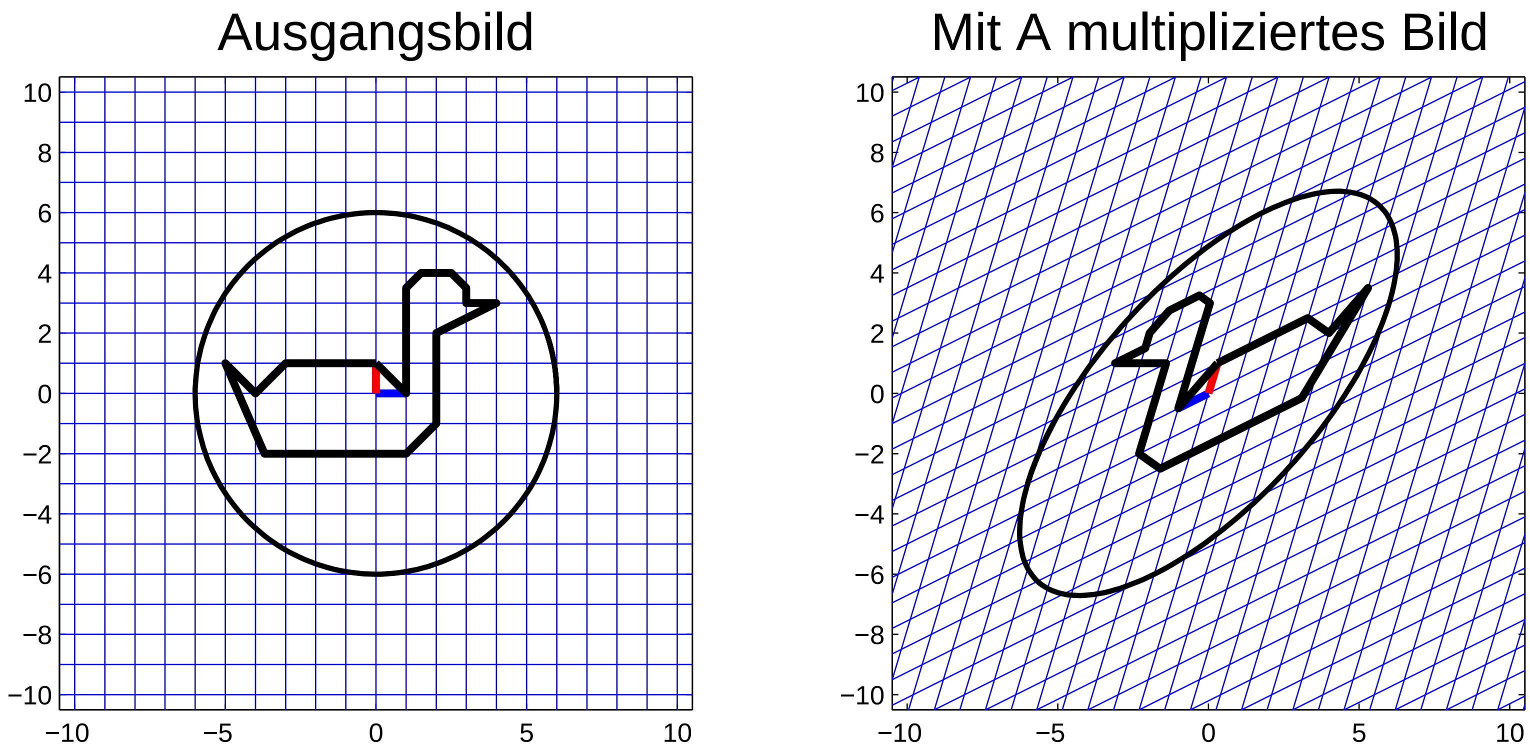
Beispiel: Lineare Transformation von Figuren I



In diesem Beispiel ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$.

Bemerkung: Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur multipliziert sich beim Übergang $x \mapsto Ax$ mit dem Faktor $|det(A)|$.

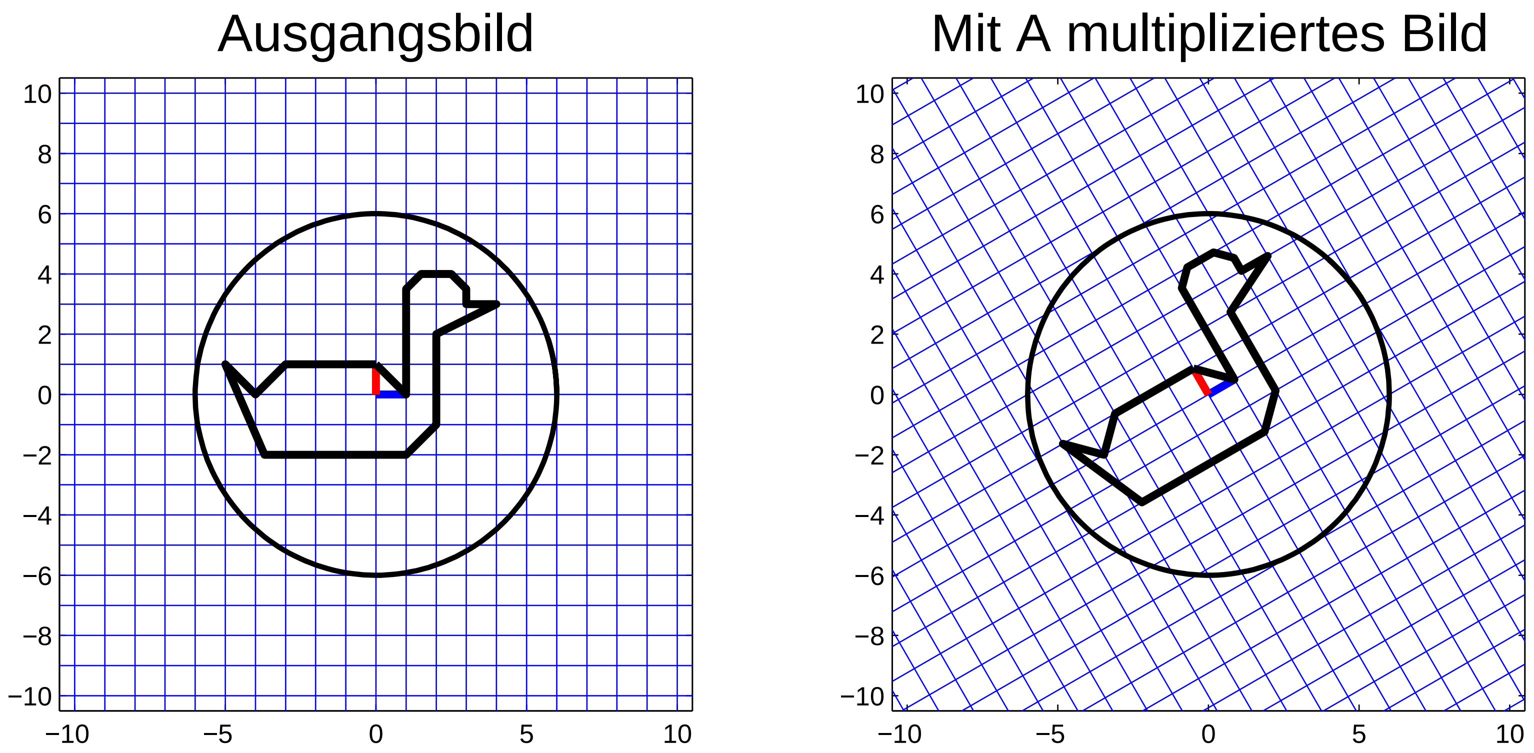
Beispiel: Lineare Transformation von Figuren II



In diesem Beispiel ist $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -0.5 & 3 \end{bmatrix}$. Es ist $det(A) < 0$.

Matrizen mit negativer Determinante bewirken eine Umkehrung der Orientierung.

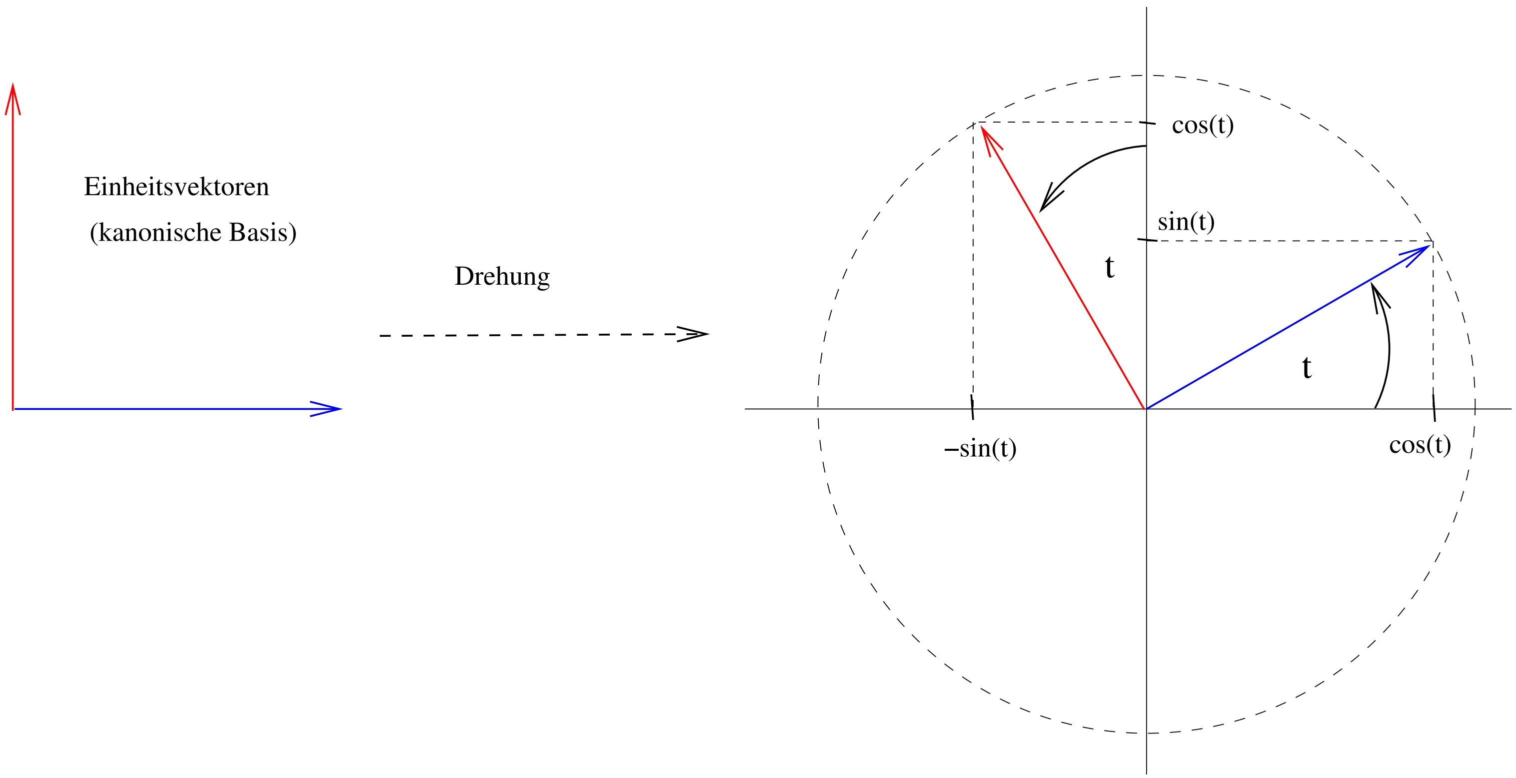
Beispiel: Lineare Transformation von Figuren III



In diesem Beispiel ist $A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad \phi = \pi/6.$

A ist eine **Drehmatrix**.

Konstruktion von Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$



Die Bilder der kanonischen Basisvektoren bei Drehung um den Winkel t gegen den Uhrzeigersinn sind

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

In den Spalten der zugehörigen Drehmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren.

Die Drehmatrix ist also

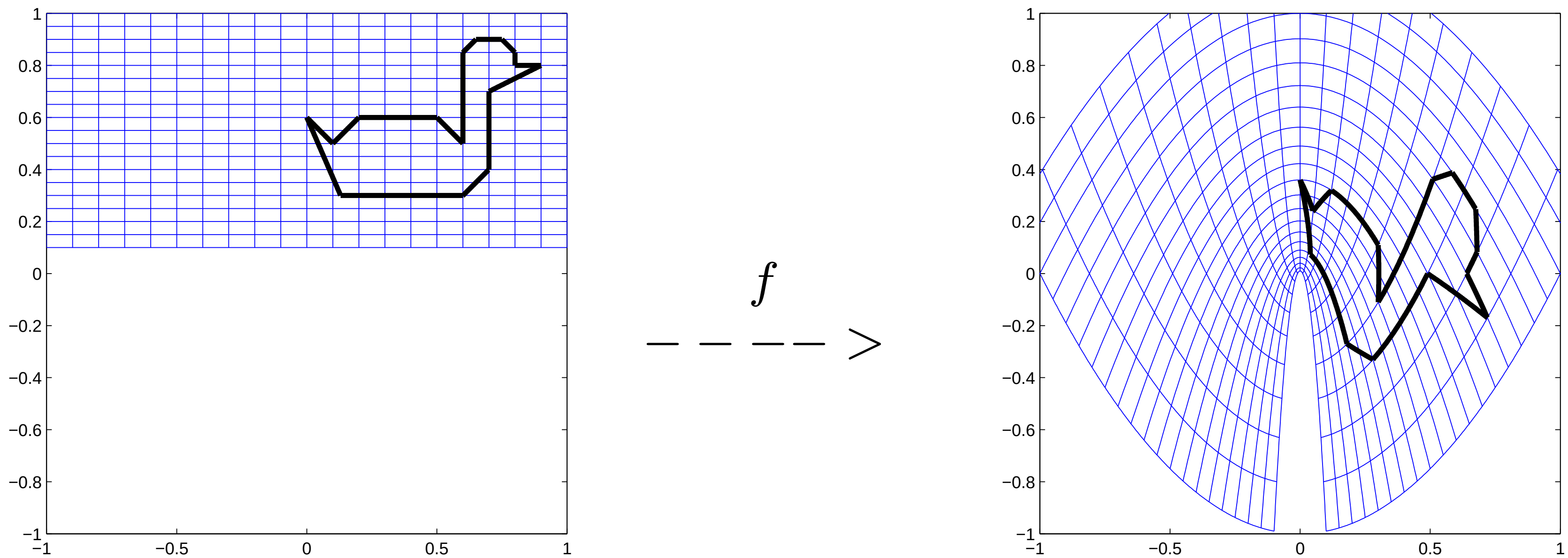
$$A = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Nichtlineare Abbildungen

Veranschaulichung der Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

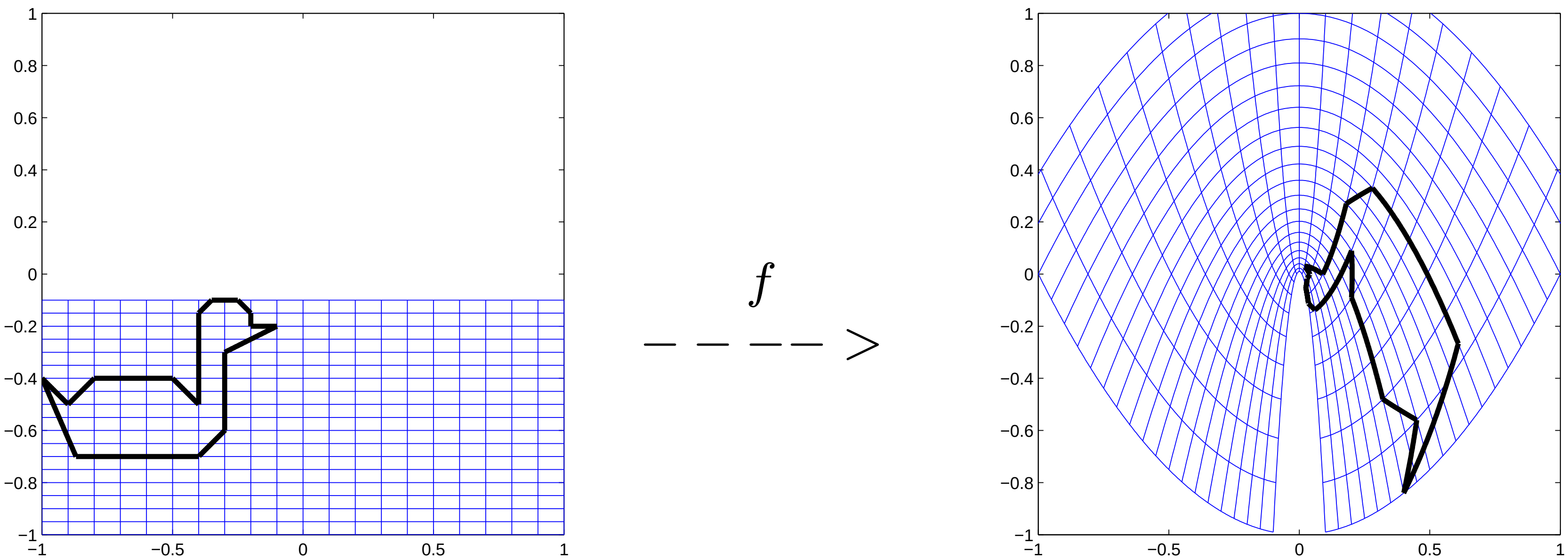
auf dem Gebiet $[-1, 1] \times [0.1, 1]$.



Veranschaulichung der Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

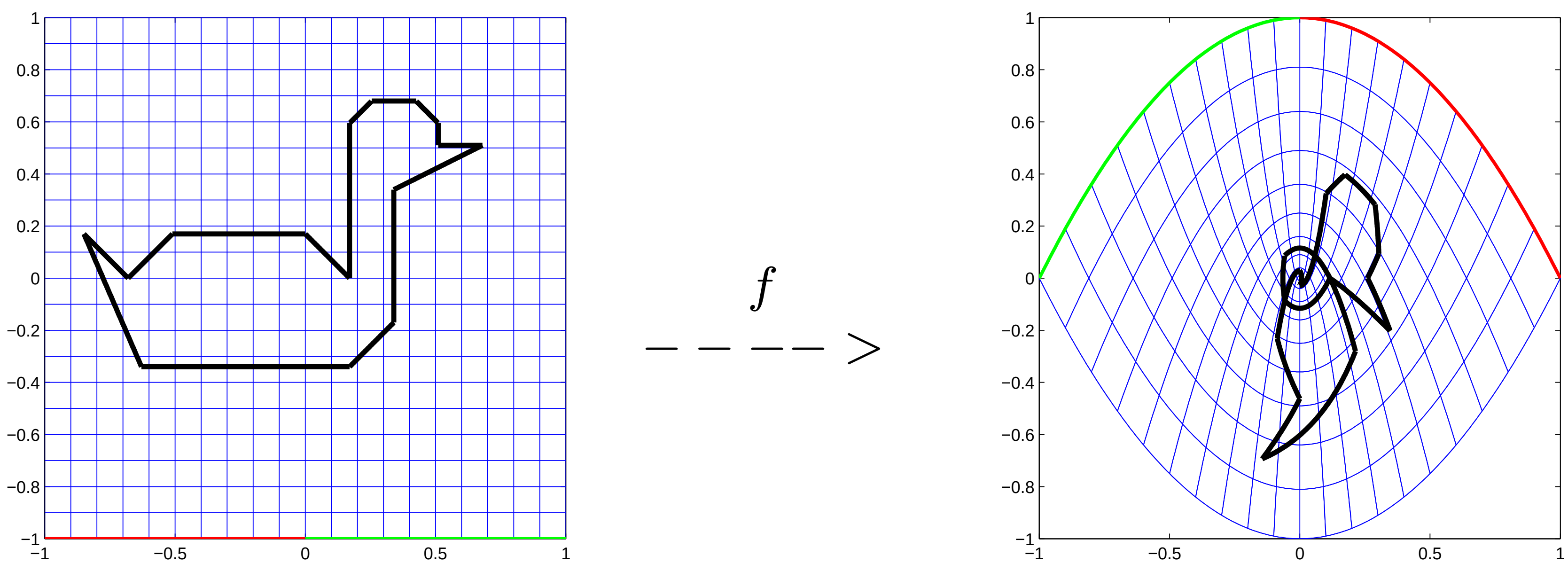
auf dem Gebiet $[-1, 1] \times [-1, -0.1]$.



Veranschaulichung der Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

auf dem Gebiet $[-1, 1] \times [-1, 1]$.



Um die Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

besser zu verstehen betrachten wir nun die Abbildungsschar

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Wir haben

$$f_0\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(identische Abbildung)}$$

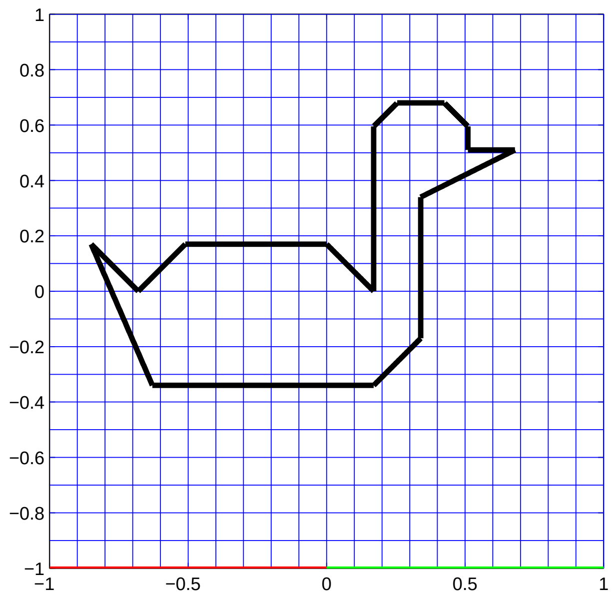
und

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}.$$

Veranschaulichung der Abbildung

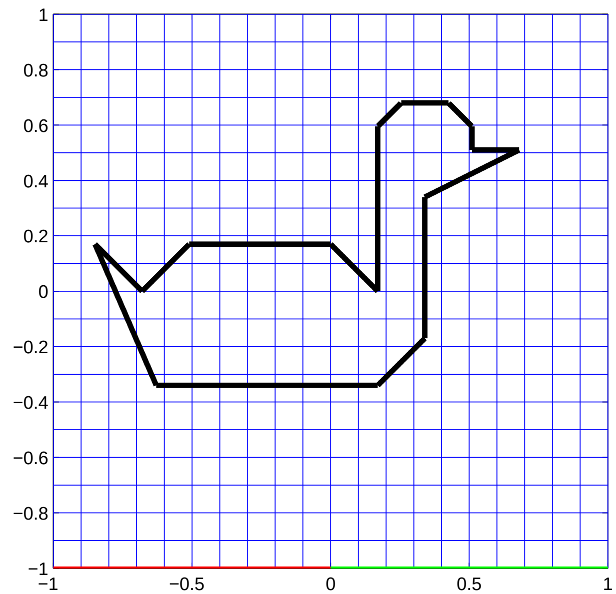
$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0$$

auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



f_t

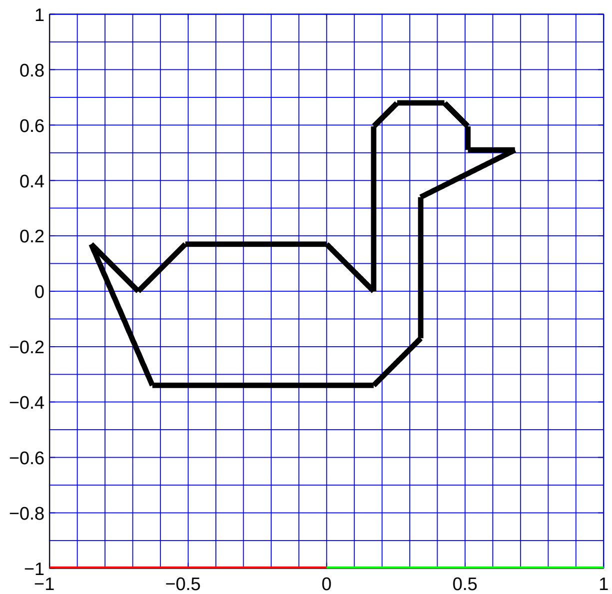
$---->$



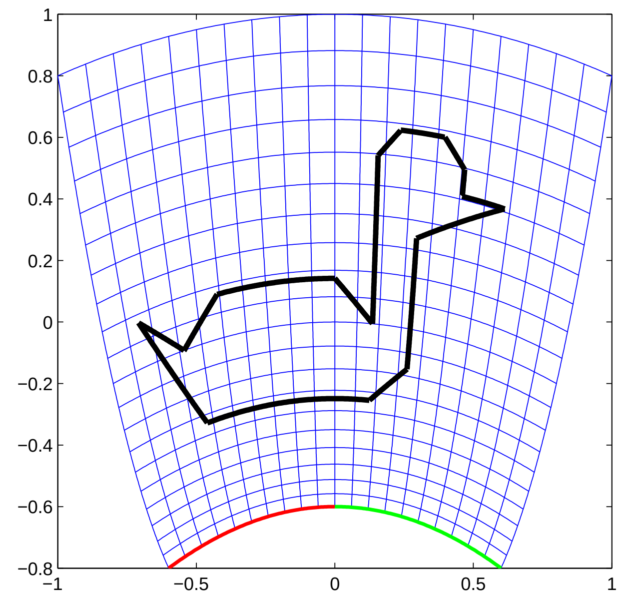
Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0.2$$

auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



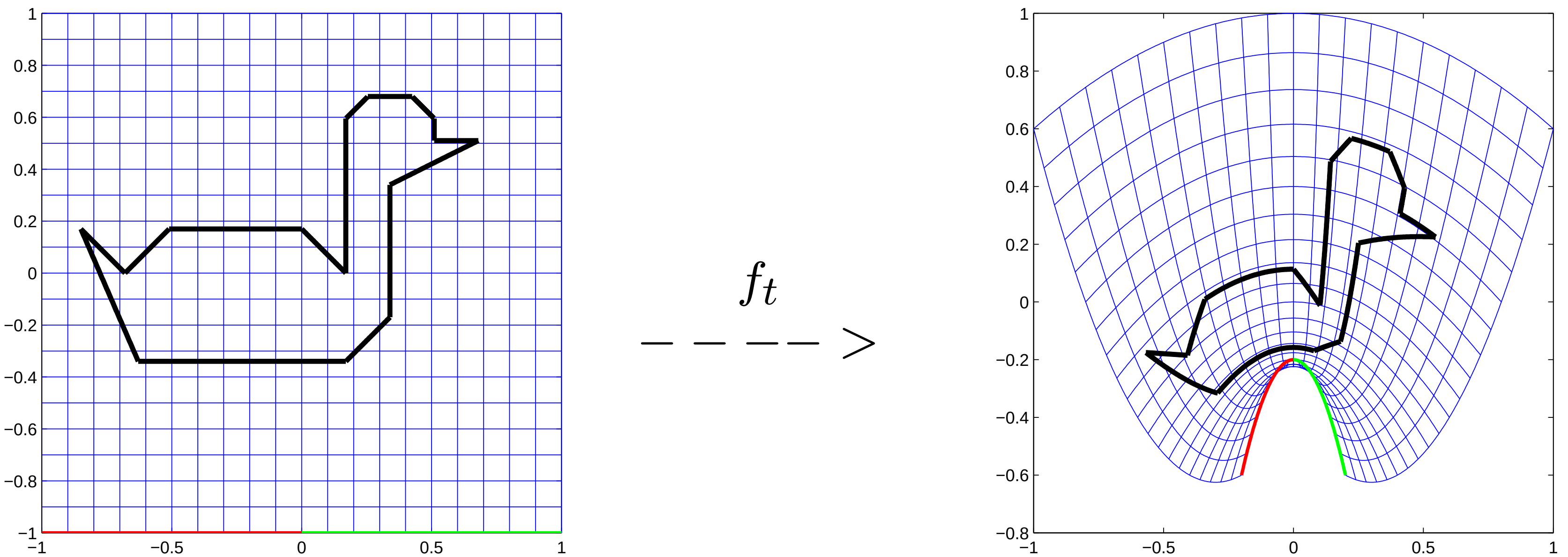
$$\xrightarrow{\quad f_t \quad}$$



Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad {\color{blue} t = 0.4}$$

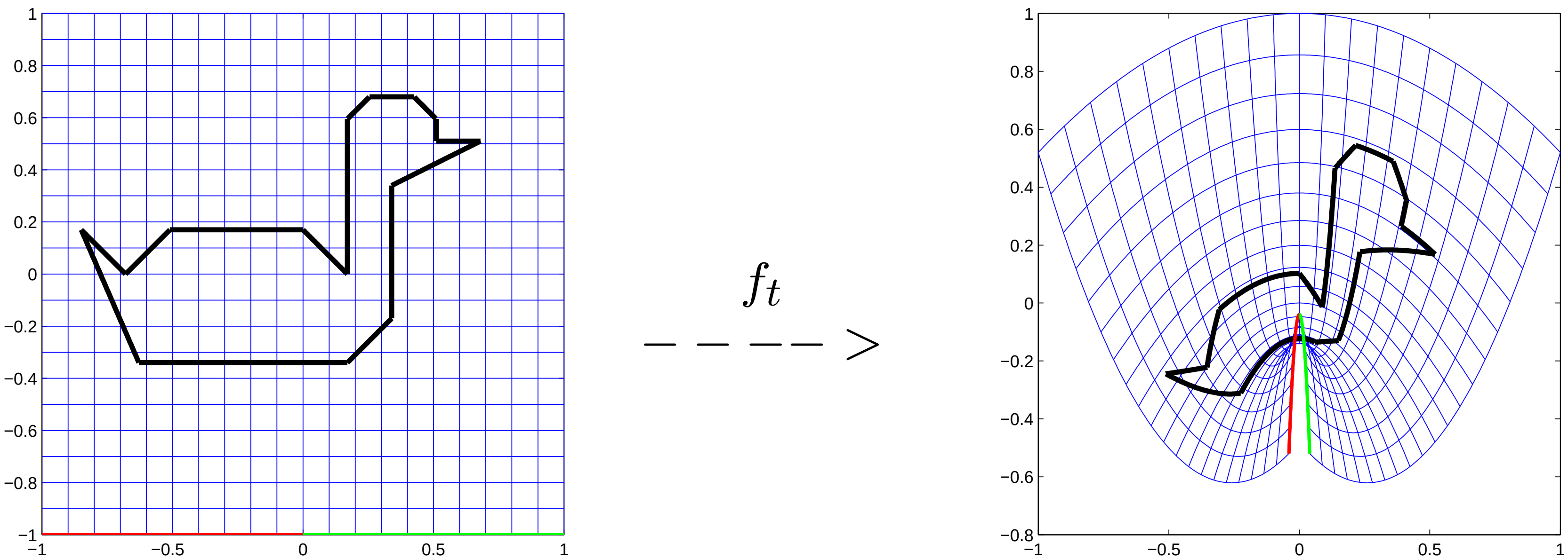
auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0.48$$

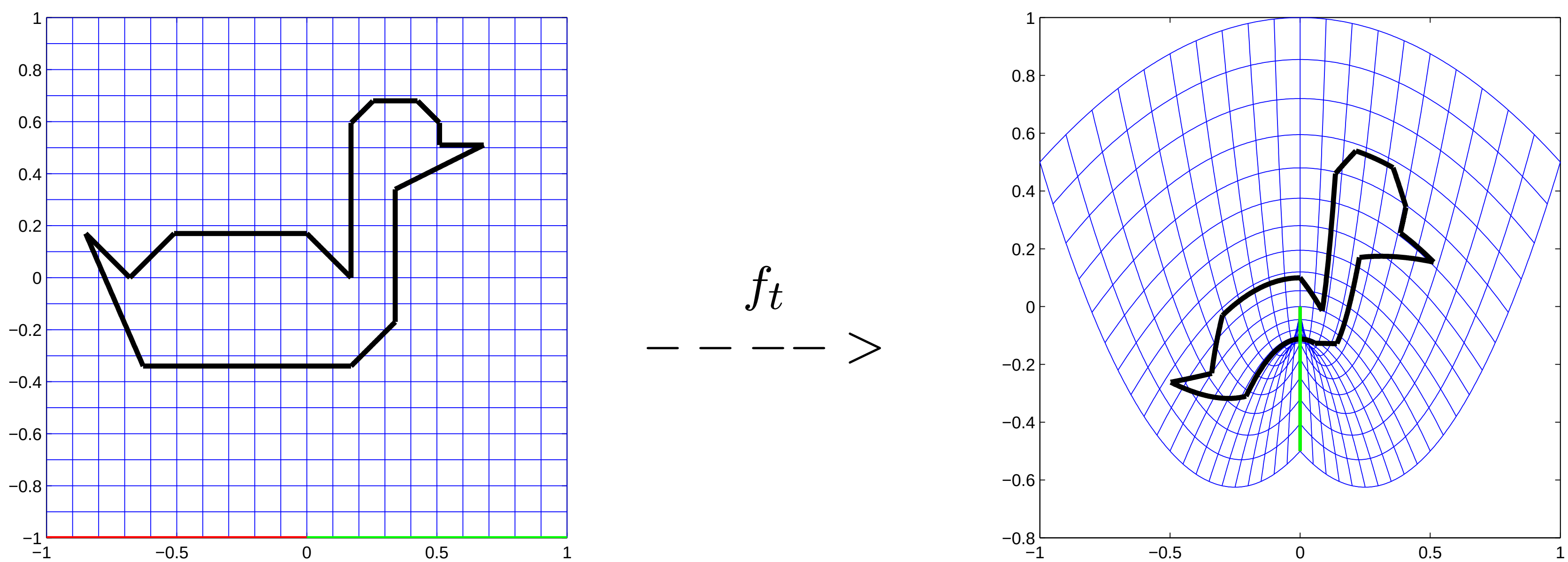
auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0.5$$

auf dem Gebiet $[-1,1]\times[-1,1]$.

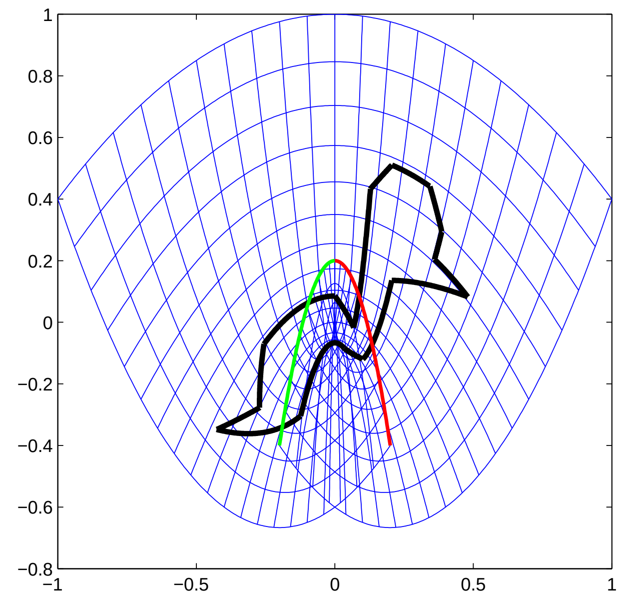


Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0.6$$

auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.

$\overset{f_t}{- - - - >}$

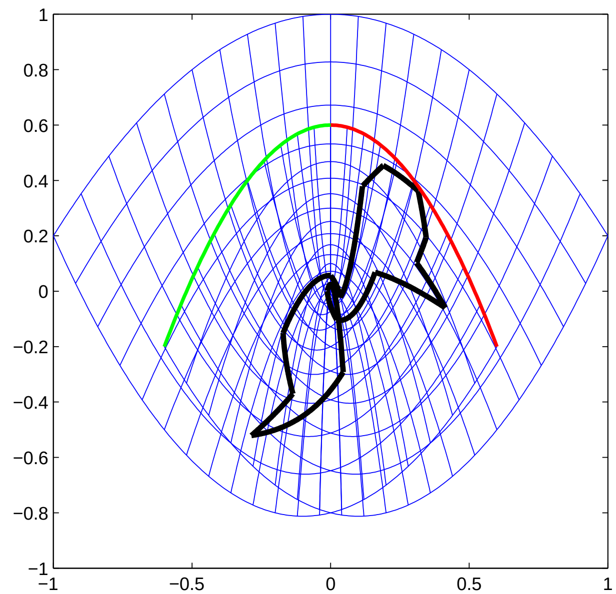


Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 0.8$$

auf dem Gebiet $[-1,1]\times[-1,1]$.

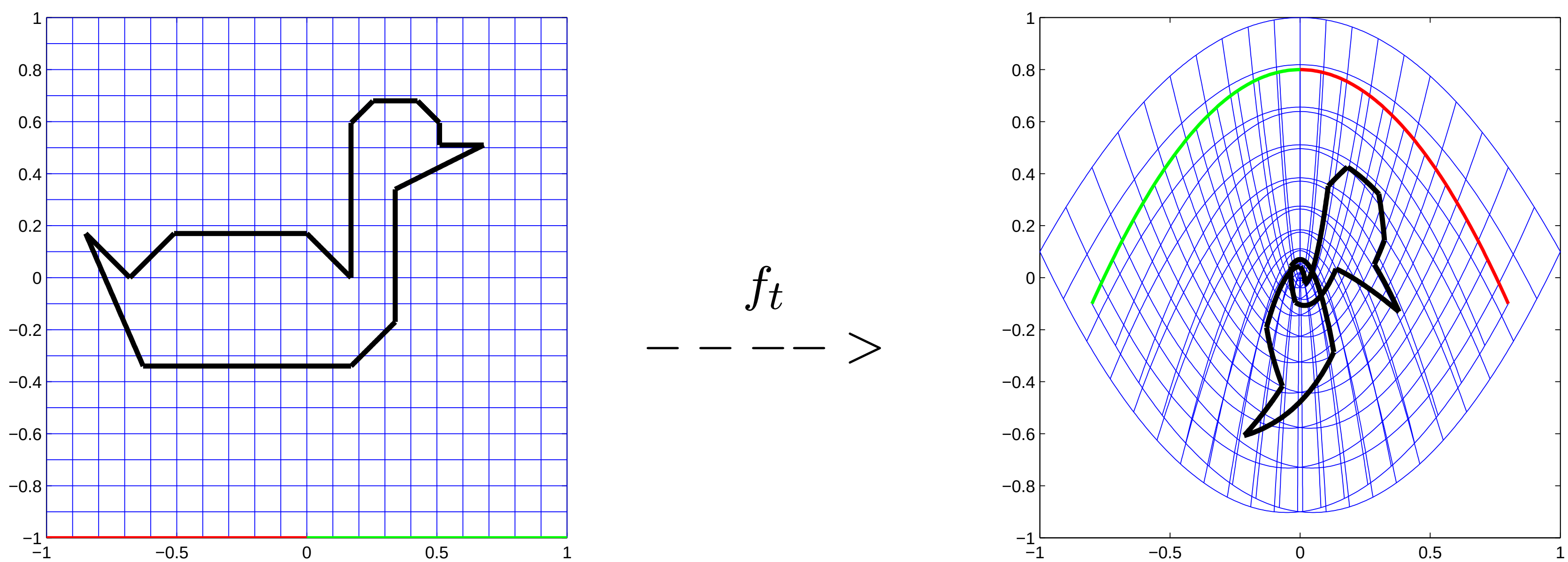
$$\xrightarrow{\quad f_t \quad}$$



Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad \color{blue}{t = 0.9}$$

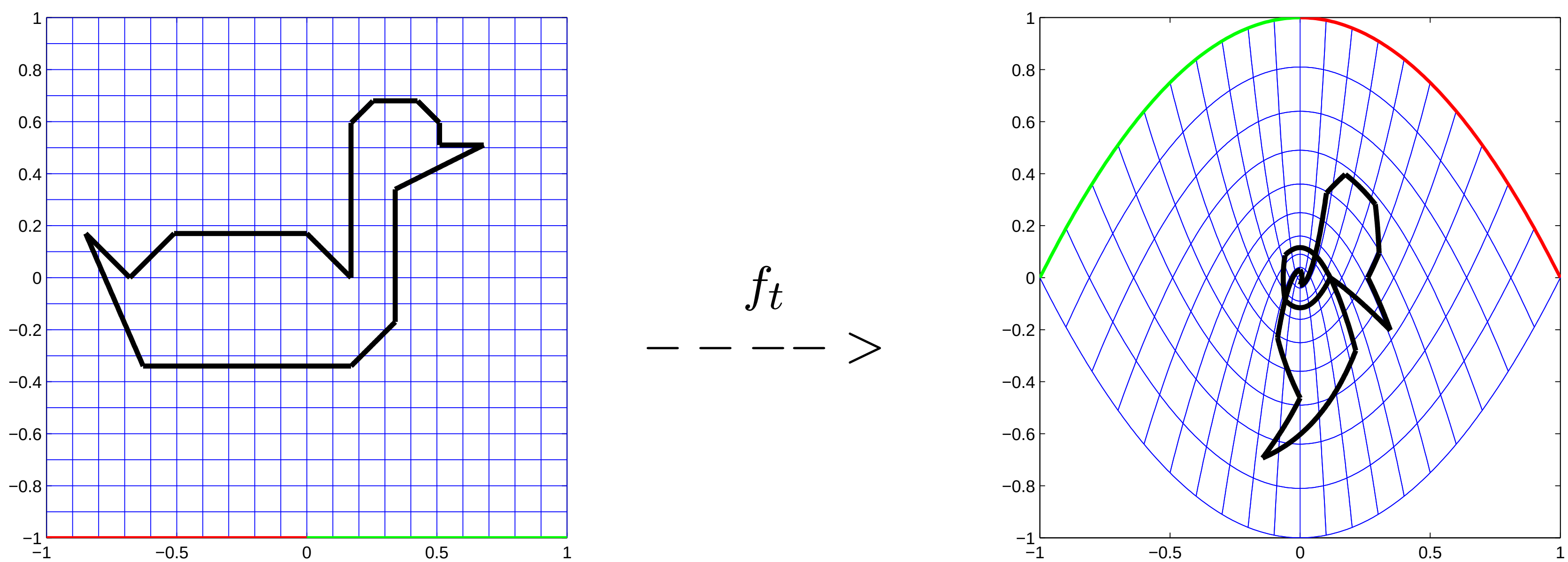
auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



Veranschaulichung der Abbildung

$$f_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1-t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}, \qquad t = 1$$

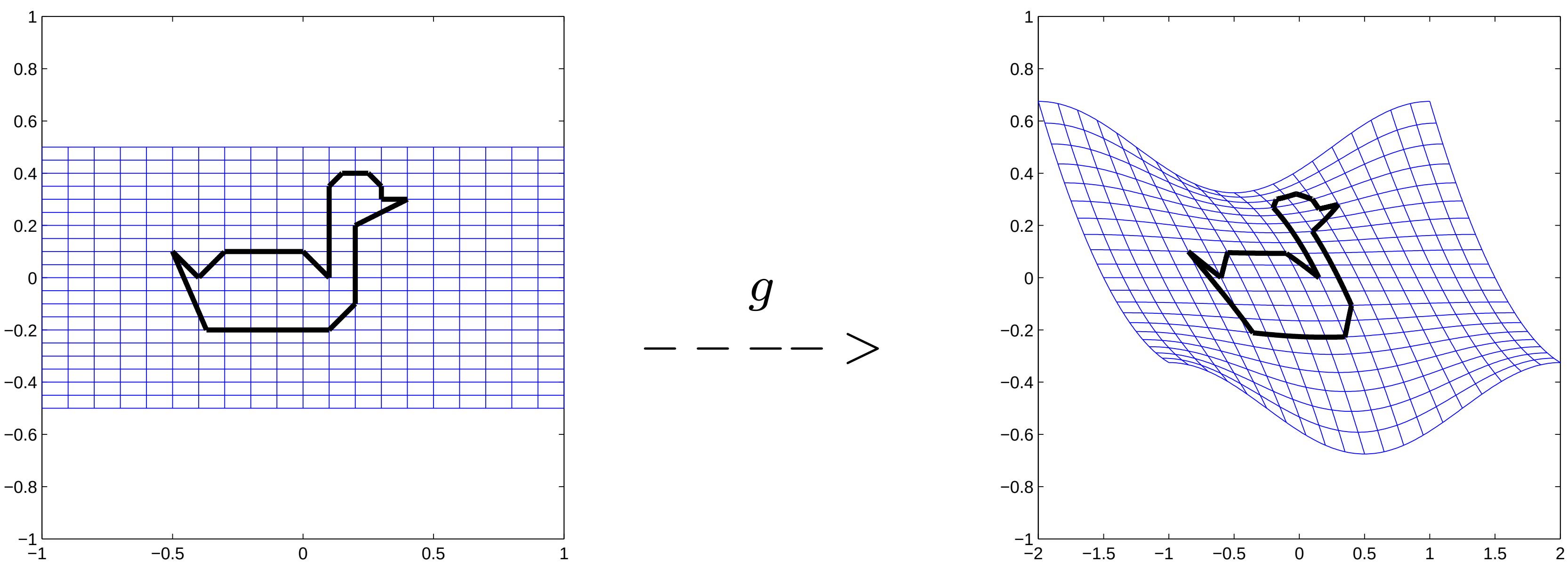
auf dem Gebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.



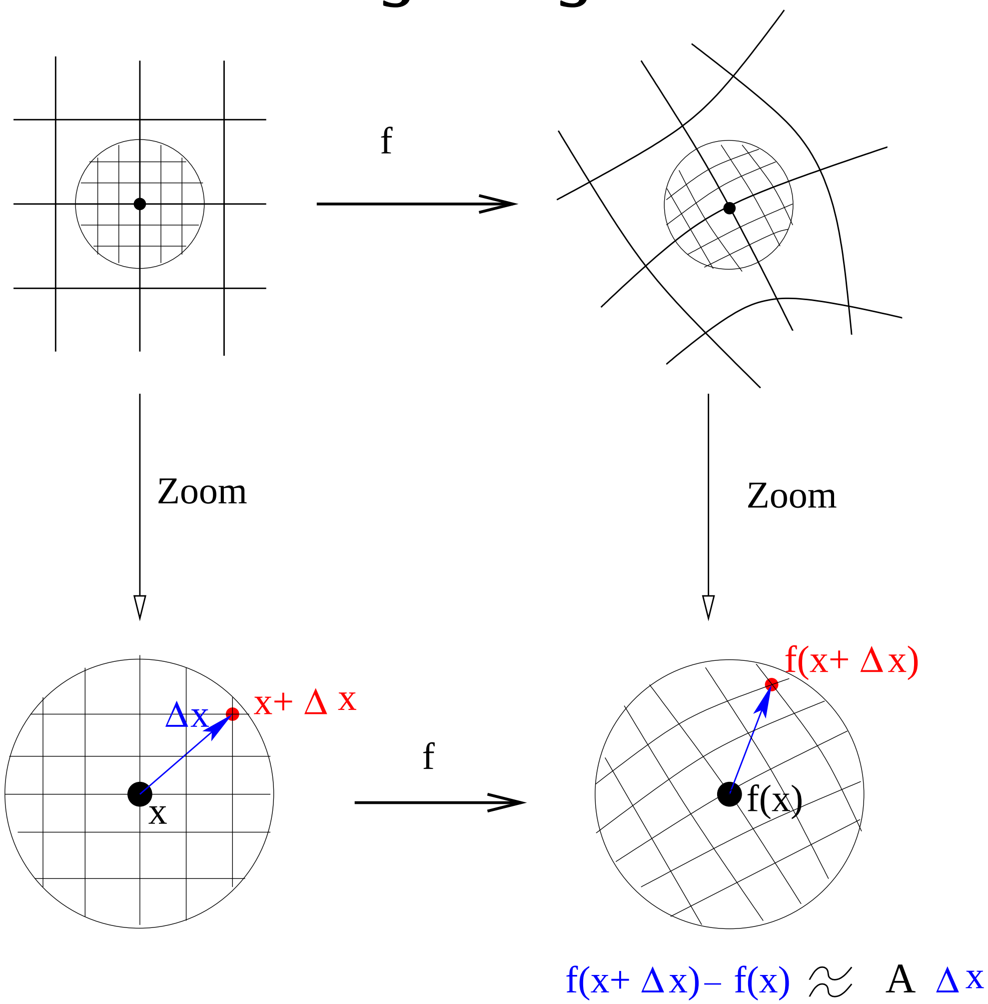
Veranschaulichung der Abbildung

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x - y \\ -0.7\cos(\pi\, x)\, y^2 + y \end{bmatrix}$$

auf dem Gebiet $[-1, 1] \times [-1/2, 1/2]$.



Situation in einer kleinen Umgebung von x:



Bei gutartigen Abbildungen ist f um x näherungsweise affin-linear:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + A\,\Delta x \qquad \text{(wenn } \Delta x \text{ klein)}$$

Die Matrix A heisst **Ableitung (Jacobi-Matrix)** von f an der Stelle x.

Zitat von der letzte Seite:

Bei gutartigen Abbildungen ist f um x näherungsweise affin-linear:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + A\,\Delta x \qquad \text{(wenn } \Delta x \text{ klein)}$$

Diese Definition ist mathematisch nicht präzise.
Wir brauchen es genauer.

Formale Definition der Ableitung:
Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, wobei G offen ist. Sei ausserdem $x \in G$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix. Angenommen, für alle $x + \Delta x \in G$ gilt

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\,\Delta x + R(\Delta x),$$

wobei (und das ist der entscheidende Punkt)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0.$$

Dann nennt man die Matrix A die Ableitung (Jacobi-Matrix) von f an der Stelle x. **Gebräuchliche Notationen:**

$$A = f'(x) \qquad \text{oder} \qquad A = Jf(x) = J_x f$$

Die lineare Abbildung

$$\Delta x \mapsto A\,\Delta x$$

heisst ebenfalls Ableitung oder auch totale Ableitung oder auch totales Differential. **Notation:**

$$d_x f(\Delta x) = A\,\Delta x = f'(x)\,\Delta x$$

Beispiel: Sei $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$. Dann ist (siehe auch das Skript)

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} (x+\Delta x)(y+\Delta y) \\ (y+\Delta y)^2 - (x+\Delta x)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} xy + (\Delta x)y + x(\Delta y) + (\Delta x)(\Delta y) \\ y^2 + 2y(\Delta y) + (\Delta y)^2 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Delta x)y + x(\Delta y) \\ 2y(\Delta y) - 2x(\Delta x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Delta x)(\Delta y) \\ (\Delta y)^2 - (\Delta x)^2 \end{bmatrix} \\
&= f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} y & x \\ -2\,x & 2\,y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + R\left(\begin{bmatrix} \Delta\,x \\ \Delta y \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Man hat

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{R\left(\begin{bmatrix} \Delta\,x \\ \Delta y \end{bmatrix}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{also} \qquad f'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y & x \\ -2\,x & 2\,y \end{bmatrix}.$$

Die Rechenmethode auf der vorherigen Seite ist nicht effektiv.

Die Jacobi-Matrix bekommt man schneller mit partiellen Ableitungen.

(siehe nächste Seite)

Partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen einer Funktion von mehreren Variablen erhält man, indem man nach jeweils einer Variablen ableitet und die anderen Variablen als konstant ansieht. Beispiel: Sei

$$f(x, y, z) = x^2 \, y \, z + \sin(z + xy) + z$$

Dann sind die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x \, y \, z + \cos(z + xy) \, y, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x^2 \, z + \cos(z + xy) \, x, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= x^2 \, y + \cos(z + xy) + 1.
\end{aligned}$$

Satz: Wenn die partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen einer Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{bmatrix}$$

alle existieren und stetig sind, dann ist f total differenzierbar mit der Ableitung

$$f'\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

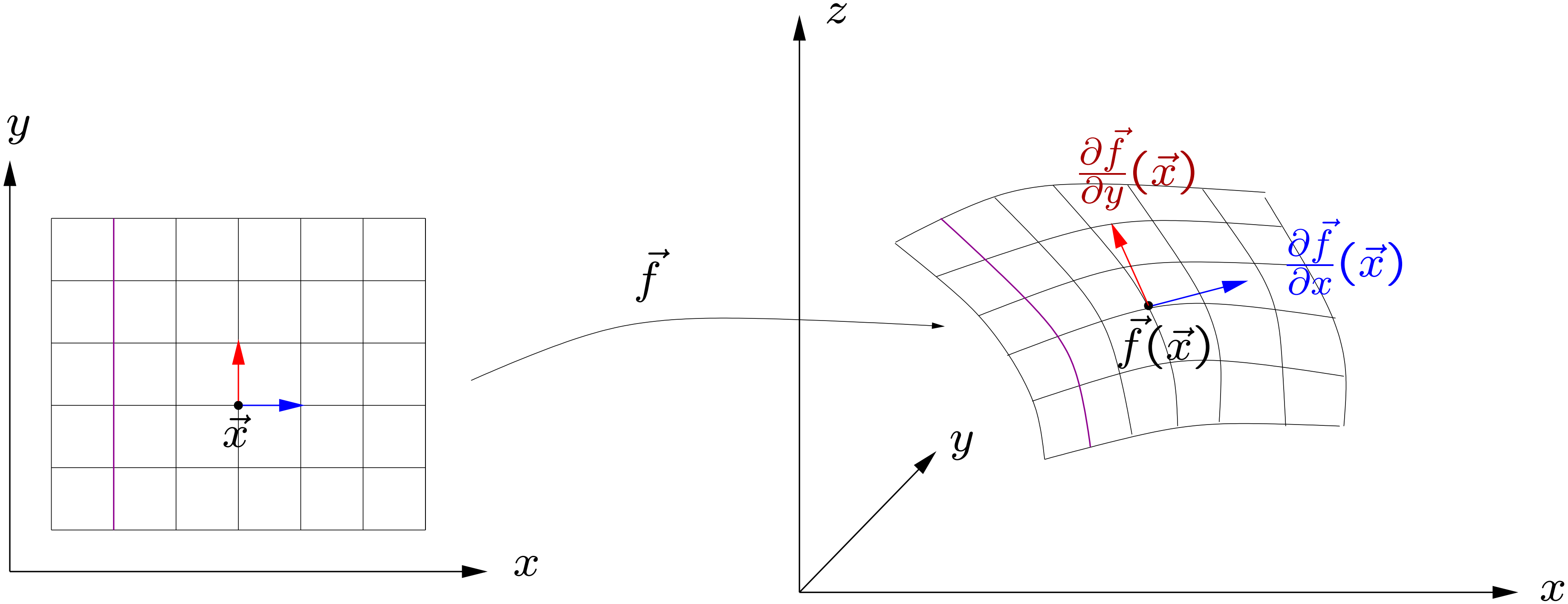
Beipiel: Die Ableitung (Jacobi-Matrix) der Abbildung

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 - x^2 \end{bmatrix}$$

ist

$$f'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(xy)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y^2-x^2)}{\partial x} & \frac{\partial(y^2-x^2)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{bmatrix}$$

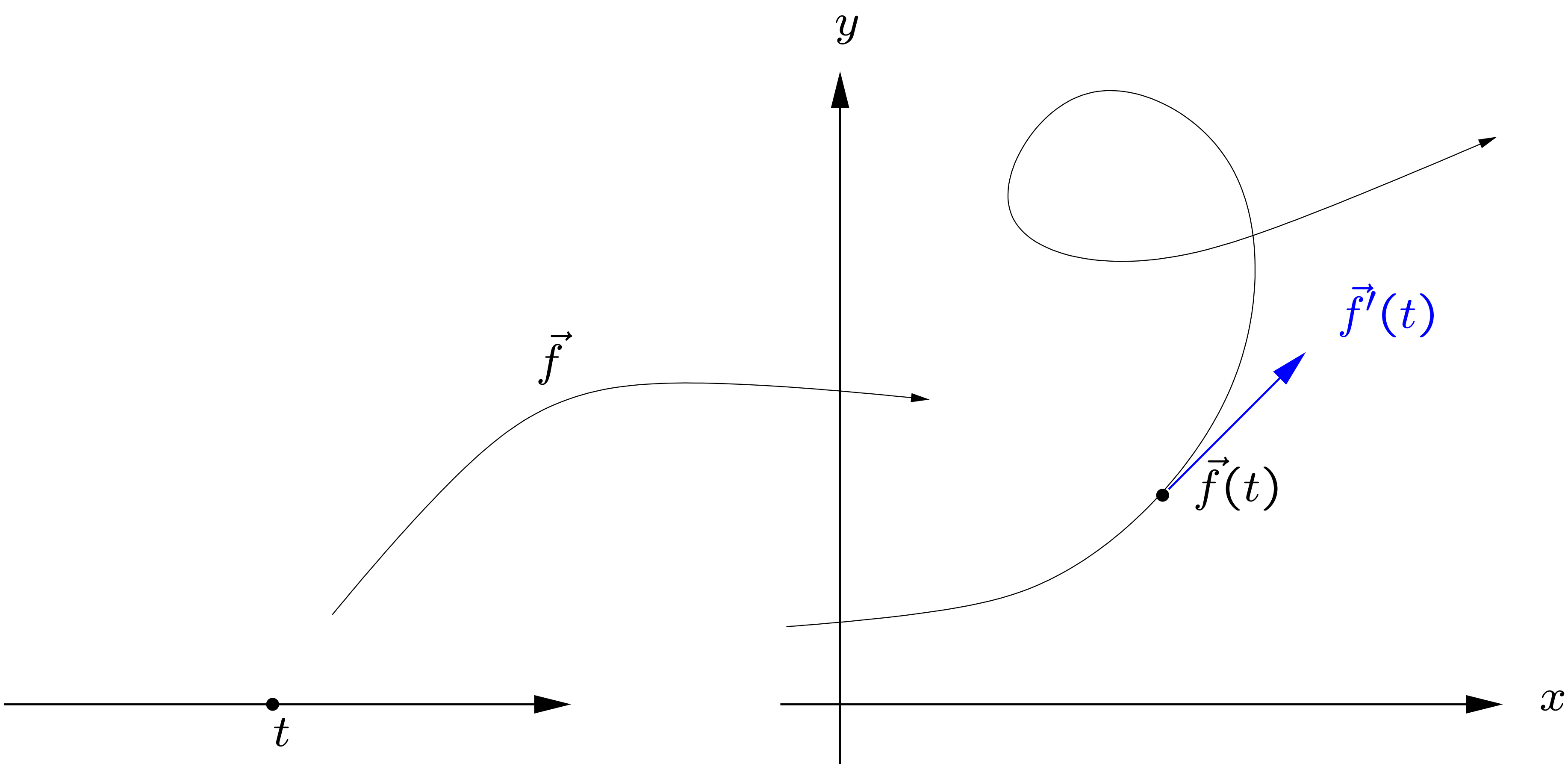
Veranschaulichung einer differenzierbaren Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^3$.



Die Vektoren $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{x})$ und $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(\vec{x})$ spannen die Tangentialebene der gekrümmten Fläche am Punkt $\vec{f}(\vec{x})$ auf.

Veranschaulichung einer differenzierbaren Abbildung

$\vec{f} : \mathbb{R} \supseteq G \to \mathbb{R}^2$ **(ebene Kurve).**



Physikalische Interpretation:

$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ ist der Ort eines Massenpunkts zum Zeitpunkt t.

$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$ ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.