Vorlesung: Analysis I für Ingenieure

Dozent: Dr. Michael Karow

Thema: unendliche Reihen

Definition.

Eine unendliche Reihe ist der Grenzwert einer Folge von Summen:

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k, \qquad \text{wobei } a_k \in \mathbb{C}.$$

Falls der Grenzwert existiert und endlich ist, heißt die Reihe konvergent. Ist dies nicht der Fall, nennt man die Reihe divergent. Ist der Grenzwert ∞ oder $-\infty$, dann nennt man die Reihe bestimmt divergent.

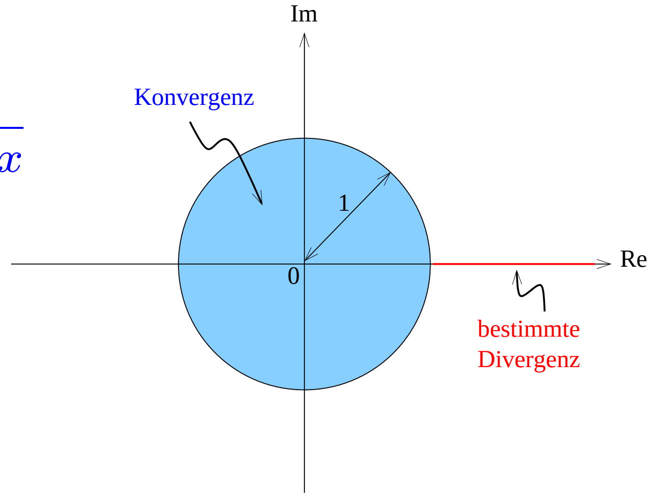
Die Summen $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ heißen Partialsummen der Reihe.

Geometrische Reihe

Sei $x \in \mathbb{C}$.

Wenn $|x| < 1$ dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$



Wenn $1 \leq x$ dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \infty \qquad \text{(bestimmte Divergenz)}$$

Für alle anderen Werte von x ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (unbestimmt) divergent.

Zur Divergenz für $x = -1$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = 1-1+1-1\ldots+(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Zur Divergenz für $x = 1$: $\sum_{k=0}^{n} 1^k = 1+1+1+1\ldots+1^n = n+1 \to \infty$.

Beweis von (*):

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\ldots+x^n) &= 1+x+\ldots x^{n-1}+x^n \\ &\quad -(x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Das einfachste (notwendige) Konvergenzkriterium

Satz: Wenn $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann folgt dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

<u>Anders formuliert:</u>

Wenn die Folge der Summanden a_k nicht gegen 0 konvergiert,

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nicht.

Beweis: Sei $s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$. Angenommen, der Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existiert. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein N, so dass $|s_n - s| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Also auch $|s_{n+1} - s| < \epsilon$ für $n \geq N$. Mit der Dreicksungleichung folgt für alle $n \geq N$,

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |(s_{n+1} - s) - (s_n - s)| \leq |s_{n+1} - s| + |s_n - s| < 2\epsilon.$$

Dies bedeutet aber, dass die Folge a_n gegen 0 konvergiert.

Anwendungsbeispiele: Die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\pi}$$

konvergieren nicht, da die jeweiligen Folgen der Summanden nicht gegen 0 konvergieren.

Warnung: Der obige Satz ist nicht umkehrbar. D.h. aus der Tatsache, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ folgt **nicht**, dass die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert.
Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe (siehe nächste Seite).

Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergiert.

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{(\ldots\ldots)}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots \to \infty.$$

Die Divergenz ist aber sehr langsam. Z.B. ist

$$\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{k} = 9,78, \qquad \sum_{k=1}^{1000000} \frac{1}{k} = 14,39.$$

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

konvergiert.

Dies folgt aus dem Leibniz-Kriterium. Siehe nächste Seite. Man kann zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Das Leibniz-Kriterium

Satz: Sei a_k eine monoton fallende Folge mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots.$$

Beweisskizze:

Seien $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ die Partialsummen. Da die Folge a_k monoton fallend ist, gilt

für ungerades n: $\quad s_{n+2} = s_n - a_{n+1} + a_{n+2} \leq s_n,$

für gerades n: $\quad s_{n+2} = s_n + a_{n+1} - a_{n+2} \geq s_n.$

Die Teilfolge $s_1, s_3, s_5, \ldots$ ist also monoton fallend. Die Teilfolge $s_2, s_4, s_6, \ldots$ ist monoton wachsend. Beide Teilfolgen laufen aufeinander zu und die Differenzen der Folgenglieder werden beliebig gering, denn für gerades n ist $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \to 0$.

Anwendungsbeispiele:

Die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\ln k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

konvergieren.

Das Majoranten- und das Minoranten-Kriterium

Grundidee:
Um die Konvergenz/Divergenz einer gegebene Reihe festzustellen, vergleiche diese mit mit einer anderen Reihe, deren Konvergenz/Divergenz bereits bekannt ist.

Sei $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in [0, \infty)$.

Minoranten-Kriterium für Divergenz:

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} b_k \text{ divergent, } \; \text{und } b_k \leq |a_k| \text{ für } k \geq k_0 \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

Majoranten-Kriterium für Konvergenz:

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} b_k \text{ konvergent, } \; \text{und } |a_k| \leq b_k \text{ für } k \geq k_0 \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Anwendungsbeispiel:

Es ist $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent.

Ein weiteres Beispiel

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}) \\
&\quad -(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}) \\
&= 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

<u>Anwendung des Majorantenkriteriums:</u>

Wie eben festgestellt wurde, ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ konvergent. Es ist $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$. Daher ist auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergent. Man kann übrigens zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beispiel Dezimaldarstellung

Für eine beliebige Folge $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}.$$

Beweis durch Anwendung des Majorantenkriteriums:

Wir haben

$$\frac{z_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$$

und (siehe Folie über die geometrische Reihe)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 9 \, \frac{1}{9} = 1.$$

$\Rightarrow$ Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}$ nach Majorantenkriterium.

Das Quotientenkriterium

Das Quotientenkriterium bekommt man, indem man im Majoranten- bzw. Minorantenkriterium die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $q \geq 0$, als Vergleichsreihe nimmt.

Quotientenkriterium für Konvergenz: Sei $0 < q < 1$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \text{ für } k \geq k_o \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

Grund:

$$\left|\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}}\right| \leq q \quad \Rightarrow \quad |a_{k_0+1}| \leq q\,|a_{k_0}|,$$

$$\left|\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}}\right| \leq q \quad \Rightarrow \quad |a_{k_0+2}| \leq q\,|a_{k_0+1}| \leq q^2 |a_{k_0}|.$$

Allgemein: $|a_{k_0+j}| \leq |a_{k_0}|\, q^j$. Also für $n = k_0 + l$,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0} |a_k| + |a_{k_0}| \underbrace{\sum_{j=1}^{l} q^j}_{\leq \frac{q}{1-q}} \leftarrow \text{ beschränkt.}$$

Quotientenkriterium für Divergenz:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \text{ für } k \geq k_o \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ divergent.}$$

Grund: a_k ist dann keine Nullfolge, weil $|a_{k+1}| \geq |a_k|$.

Limes-Variante des Quotientenkriteriums.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \text{die Reihe } \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergiert.} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \text{die Reihe } \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ divergiert.} \end{cases}$$

Bemerkung: Falls der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ nicht existiert, oder existiert und =1 ist, gibt das Quotiententkriterium keine Auskunft über das Konvergenzverhalten der Reihe.

Zu den Themen

- Vergleich von Reihen mit Integralen
- Absolute Konvergenz
- Potenzreihen

schaue ins Skript.