# Vorlesung Analysis I

Michael Karow

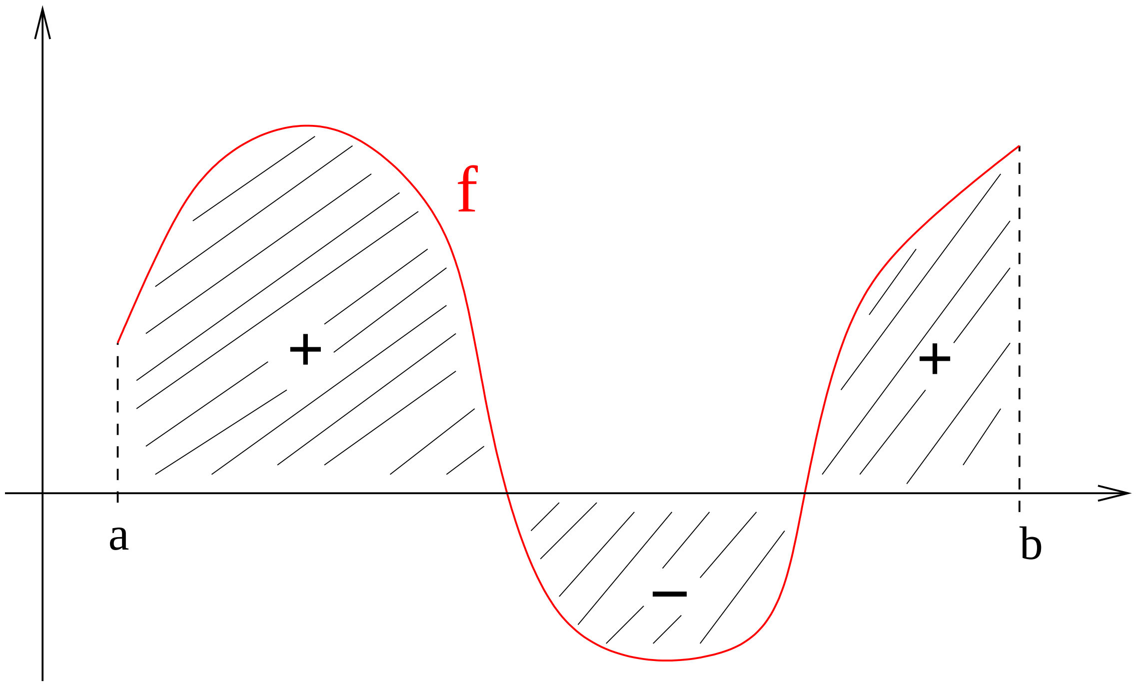
**Thema:** bestimmte Integrale

## Einführung

**Problem:**

Bestimmung des Flächeninhalts der Fläche zwischen dem Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der $x$-Achse. Dabei werden Flächenstücke unter der $x$-Achse negativ gezählt.

**Notation:** Flächeninhalt=Integral= $\int_a^b f(x)\,dx$.



# Definition des Integrals I: Integral von Treppenfunktionen

Eine Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es endlich viele Knotenpunkte

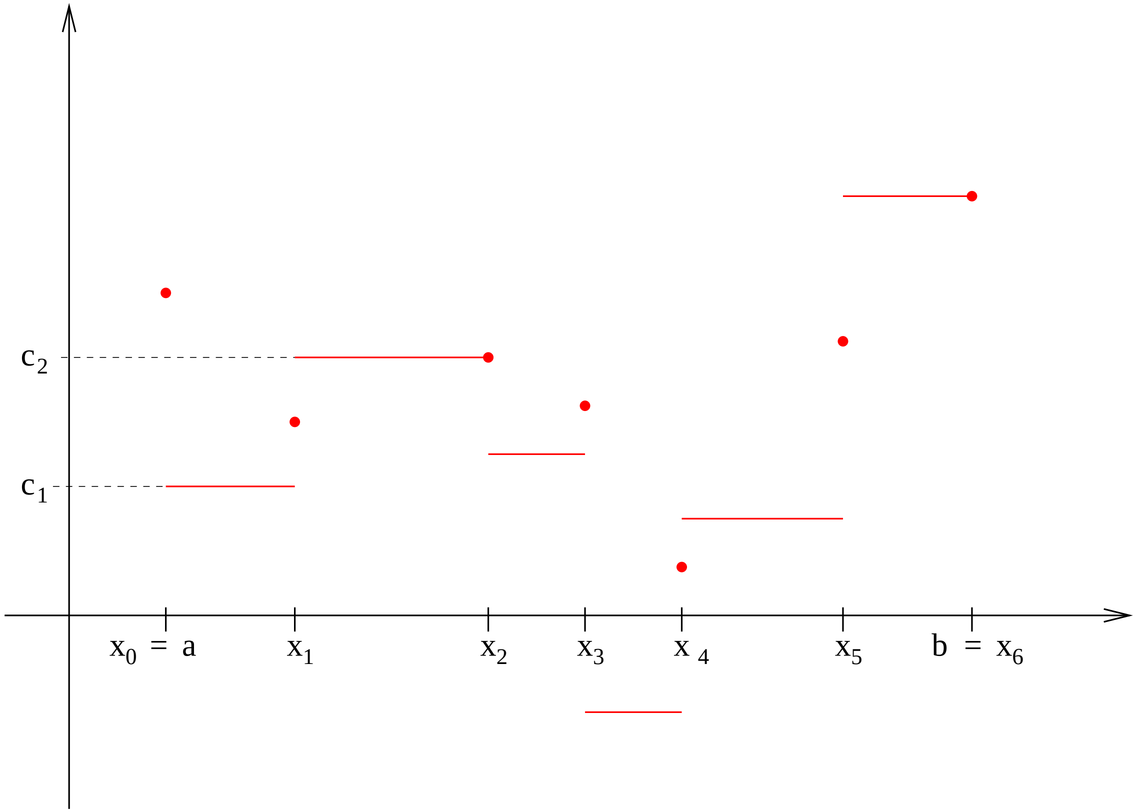
$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

und Werte

$$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

gibt, so dass

$$T(x) = c_k \quad \text{für} \quad x \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, \ldots, n.$$



# Definition des Integrals I: Integral von Treppenfunktionen

Eine Funktion $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es endlich viele Knotenpunkte

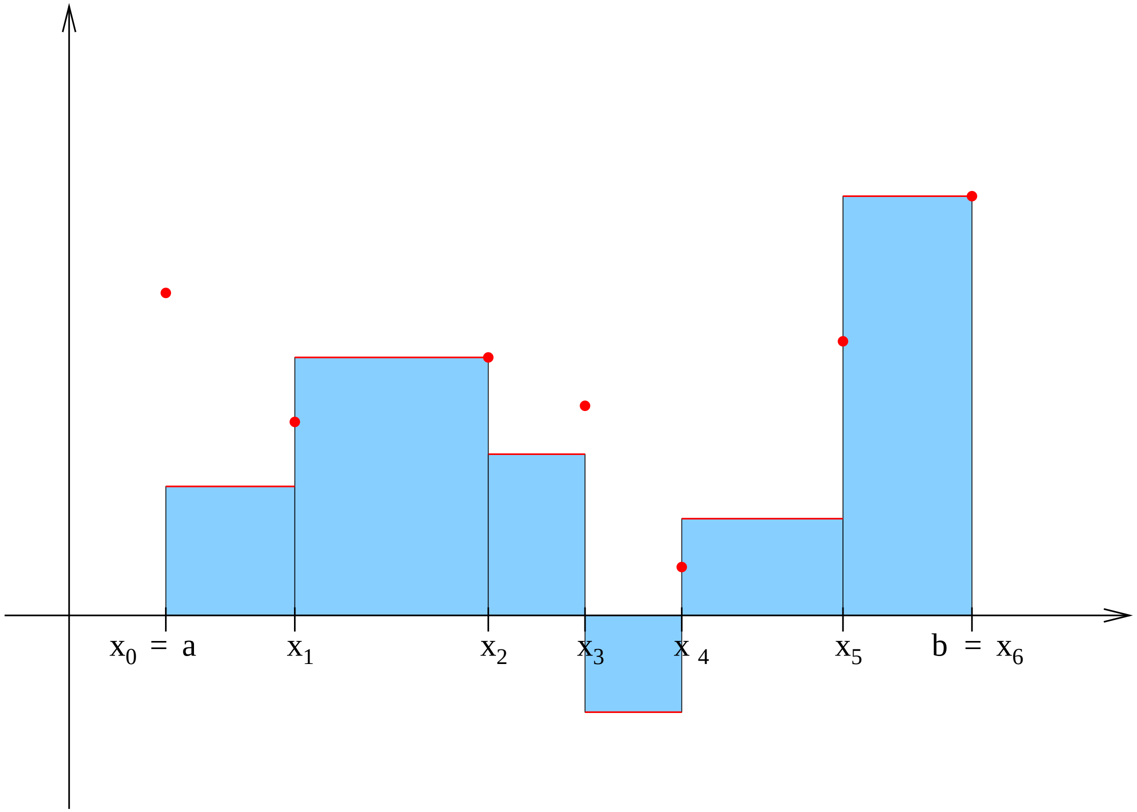
$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

und Werte

$$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

gibt, so dass

$$T(x) = c_k \quad \text{für} \quad x \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad k = 1, \ldots, n.$$




**Definition:**

$$\int_a^b T(x)\, dx := \sum_{k=1}^{n} c_k \left(x_k - x_{k-1}\right)$$

## Definition des Integrals II

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, falls es Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Eine beschränkte Funktion heißt integrierbar, falls es zu jeder noch so kleinen Zahl $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $T_1, T_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

(1) $T_1(x) \leq f(x) \leq T_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$,

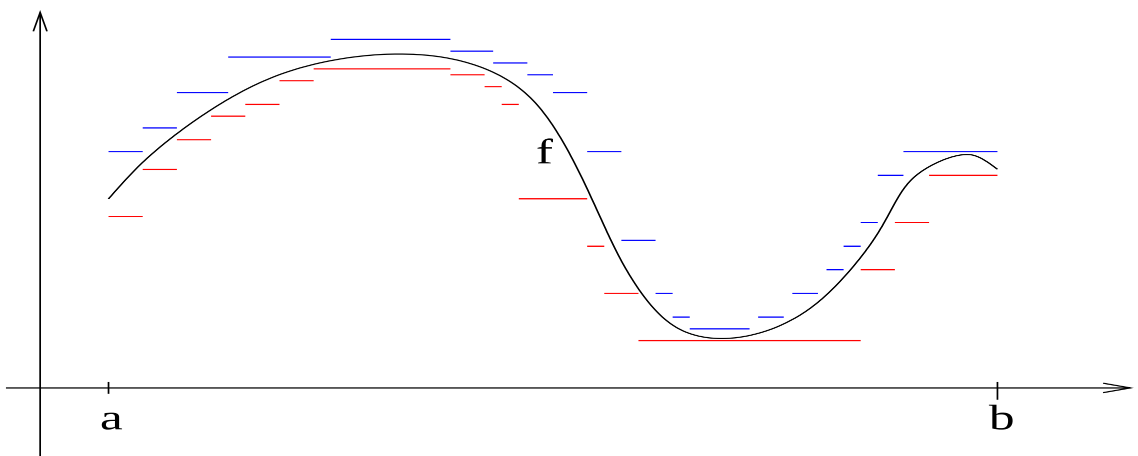
(2) $\displaystyle\int_a^b T_2(x)\,dx - \int_a^b T_1(x)\,dx < \epsilon$.

Ist dies der Fall, so gibt es genau eine Zahl $I \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_a^b T_1(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b T_2(x)\,dx$$

für alle Treppenfunktionen $T_1, T_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (1).

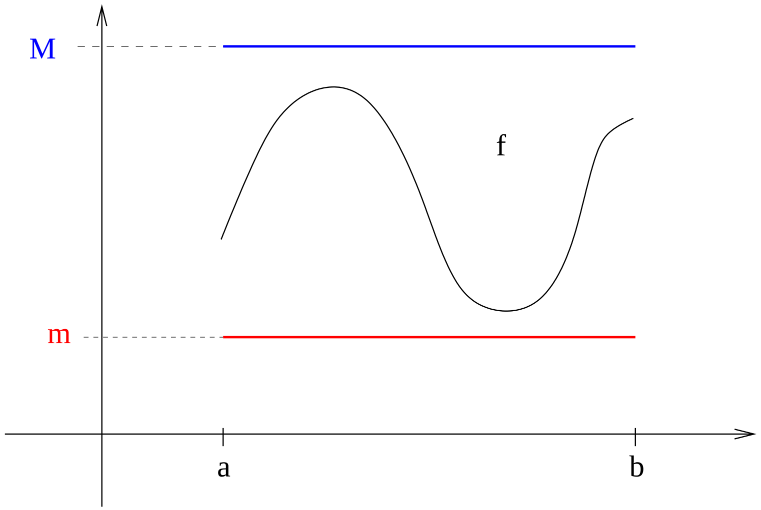
**Notation:** $I =: \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



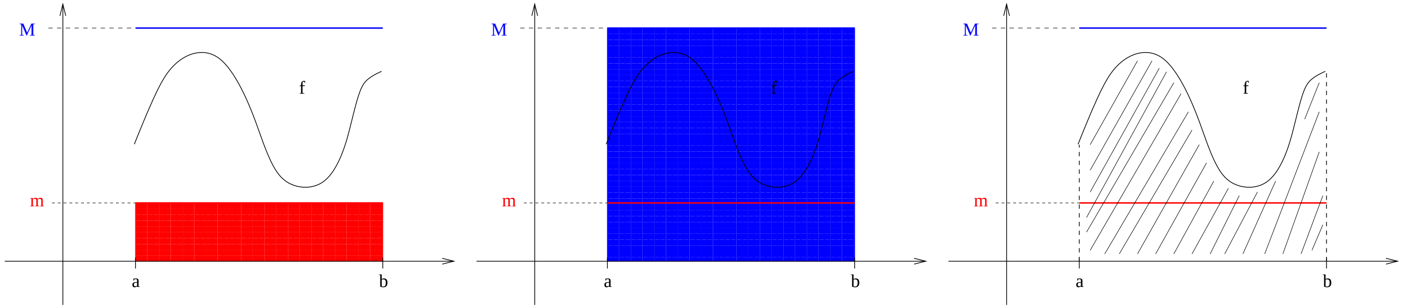
## Abschätzung des Integrals

Direkte Folgerung aus der Integraldefinition:

$$m \le f(x) \le M \text{ für alle } x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$



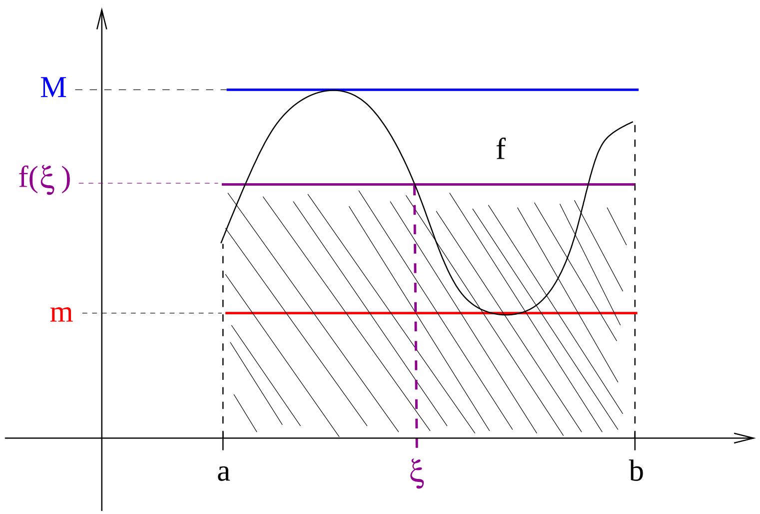

Integralvergleich:



# Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a).$$




**Beweis:**
Setze $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$. Also

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

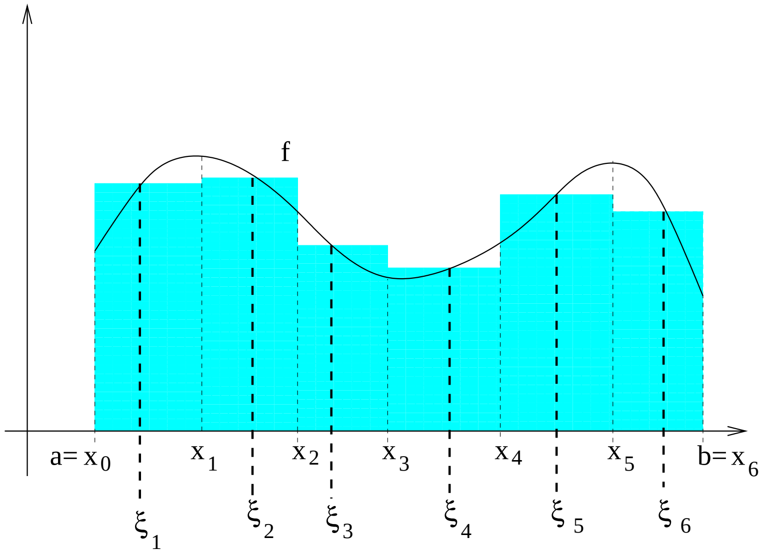
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

# Folgerung aus dem Mittelwertsatz:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann gibt es in jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein $\xi_k$, so dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}).$$




Wählt man statt der $\xi_k$ andere Elemente $\widetilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ aus, so bekommt man nur eine Näherung an das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\widetilde{x}_k)\,(x_k - x_{k-1}). \qquad (*)$$

Summen der Form $(*)$ heißen **Riemannsche Summen**.

Indem man die Abstände $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ hinreichend klein wählt, kann die Näherung $(*)$ beliebig genau machen.

## Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

(a) Sind $F_1, F_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktion, so dass $F_1'(x) = F_2'(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

**Zwei Stammfunktionen von $f$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.**

(b) Die Ableitung der Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ist $F'(x) = f(x)$.

**Die Ableitung des Integrals von $f$ als Funktion der oberen Integrationsgrenze ist eine Stammfunktion von $f$.**

**Folgerung:** Ist $\widetilde{F}$ irgendeine Stammfunktion von $f$, dann ist

$$\int_a^b f(t)\, dt = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a).$$

**Notation (unbestimmtes Integral):**

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c = \text{Menge aller Stammfunktionen von } f$$