Vorlesung: Analysis I für Ingenieure

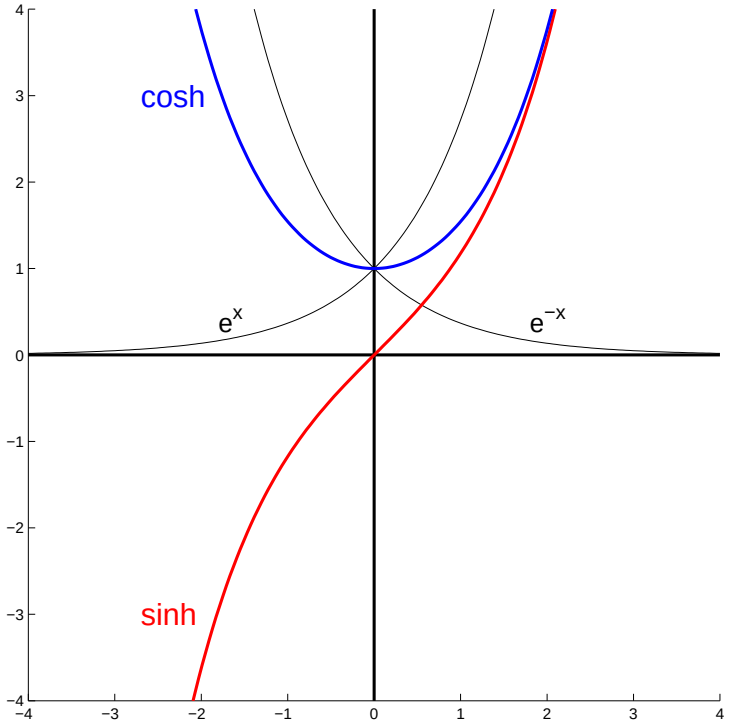
Michael Karow

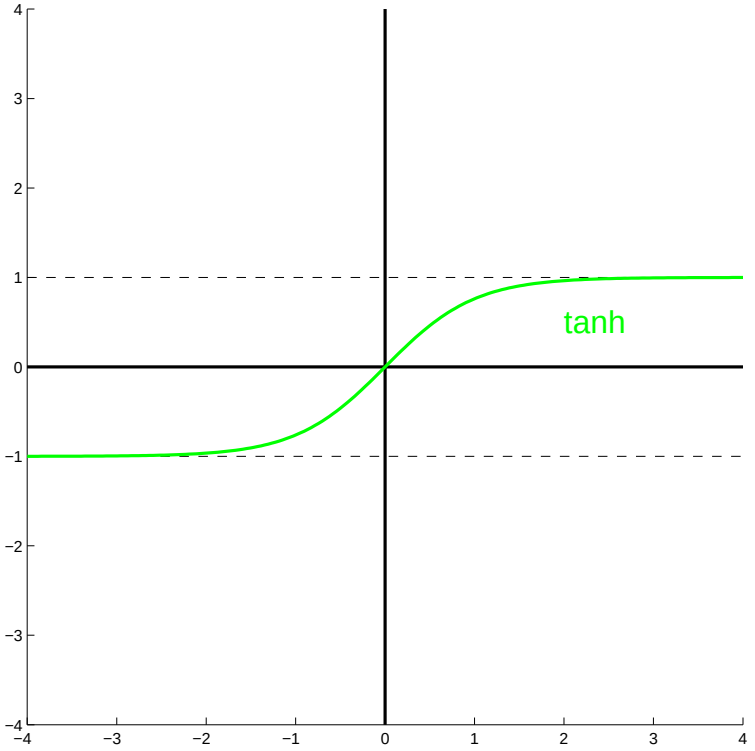
Thema: Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

Die Hyperbelfunktionen I

Definitionen von Cosinus hyperbolicus, Sinus hyperbolicus und Tangens hyperbolicus:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^x}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$





Ableitungen:

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \cosh(x), \quad \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x)$$

Die Hyperbelfunktionen II

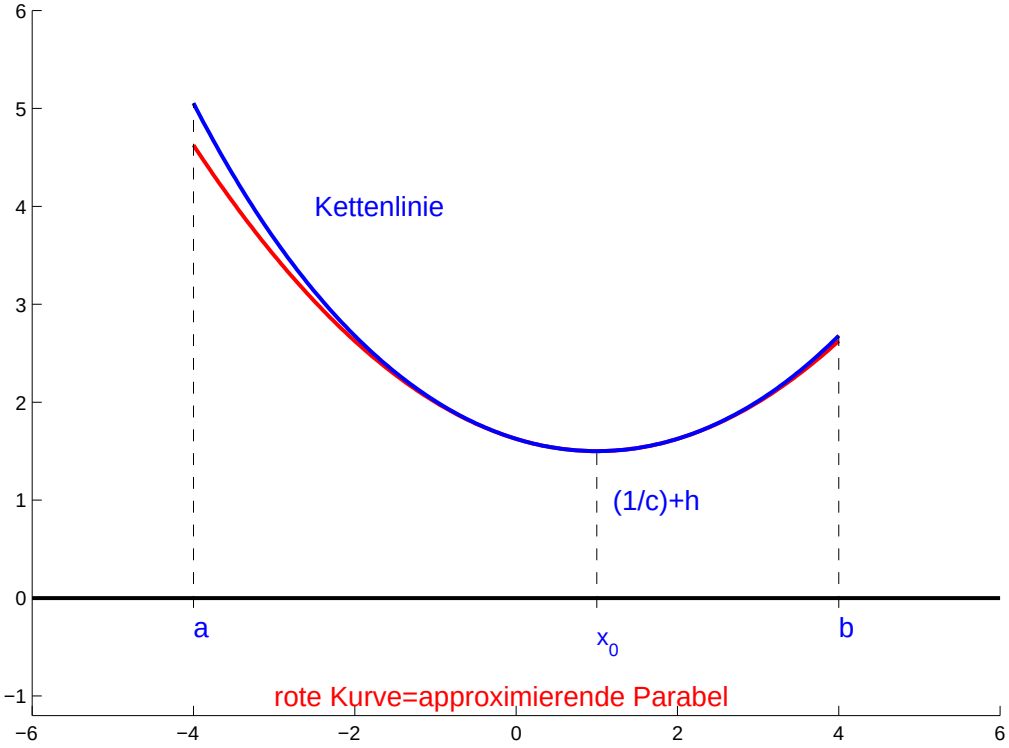
Sei $\{(x, y(x))|\, x \in [a, b]\}$ die Lage eines hängenden **idealen Seils** welches an seinen Endpunkten befestigt ist. Dann erfüllt die Funktion $x \mapsto y(x)$ die Differentialgleichung

$$y''(x) = c\sqrt{1 + (y'(x))^2}, \qquad c > 0$$

Die Lösungen dieser DGL sind

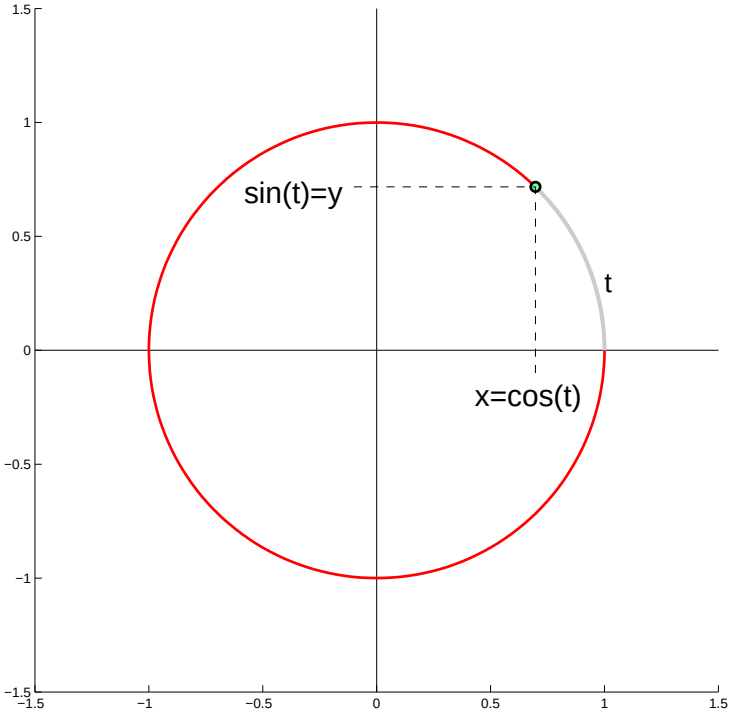
$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh(c\,(x - x_0)) + h \qquad (*)$$

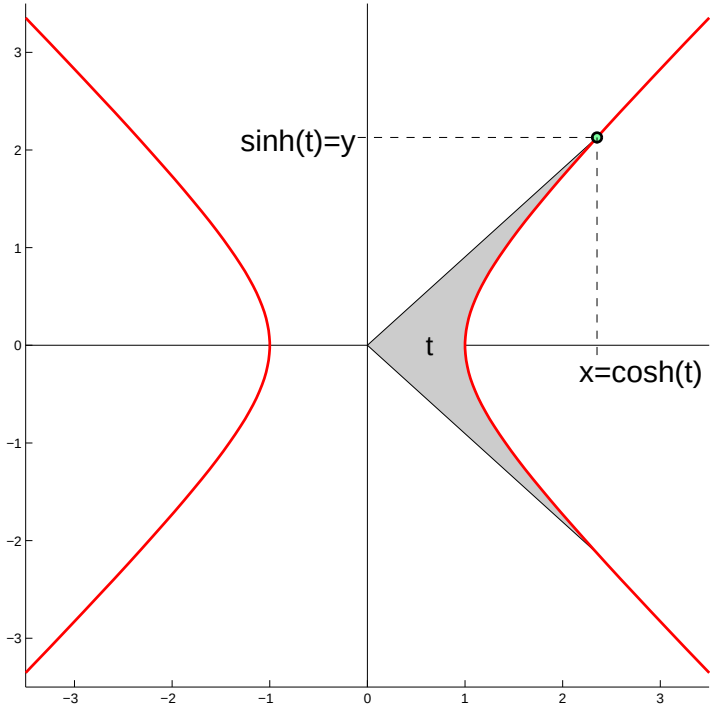
Ein ideales Seil hat keine Biegesteifigkeit. Diese Eigenschaft wird näherungsweise durch eine Kette mit vielen kleinen Kettengliedern realisiert. Aus diesem Grund nennt man die Graphen der Funktionen $(*)$ **Kettenlinien**.
Die Parameter c, x_0und h hängen von der Länge und den Aufhängepunkten des Seils ab.



Die Hyperbelfunktionen III (Vergleich mit Winkelfunktionen)

Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ und $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.





$$\text{Einheitskreis} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$= \{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{Parameter } t = \pm \text{ Bogenlänge}$$

$$\text{Rechter Ast der Einheitshyperbel} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$$
$$= \{(\cosh(t), \sinh(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{Parameter } t = \pm \text{ Flächeninhalt}$$

Areafunktionen I

Problem: Finde zu dem Punkt $(x, y) = (\cosh(t), \sinh(t))$ auf dem rechten Ast der Einheitshyperbel den zugehörigen Flächeninhalt t.

Umformulierung: Finde t, so dass $\sinh(t) = y$. Lösung:

$$
\begin{aligned}
\sinh(t) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^t - e^{-t}}{2} = y \\
&\Leftrightarrow \quad e^t \frac{e^t - e^{-t}}{2} = e^t\, y \\
&\Leftrightarrow \quad (e^t)^2 - 2y\, e^t - 1 = 0 \qquad \text{(quadratische Gleichung für } e^t\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad e^t = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{oder} \quad \underbrace{e^t}_{>0} = \underbrace{y - \sqrt{y^2+1}}_{<0} \\
&\Leftrightarrow \quad e^t = y + \sqrt{y^2+1} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).
\end{aligned}
$$

Die motiviert die Definition der Funktion **Areasinus** (Area=Fläche(ninhalt)):

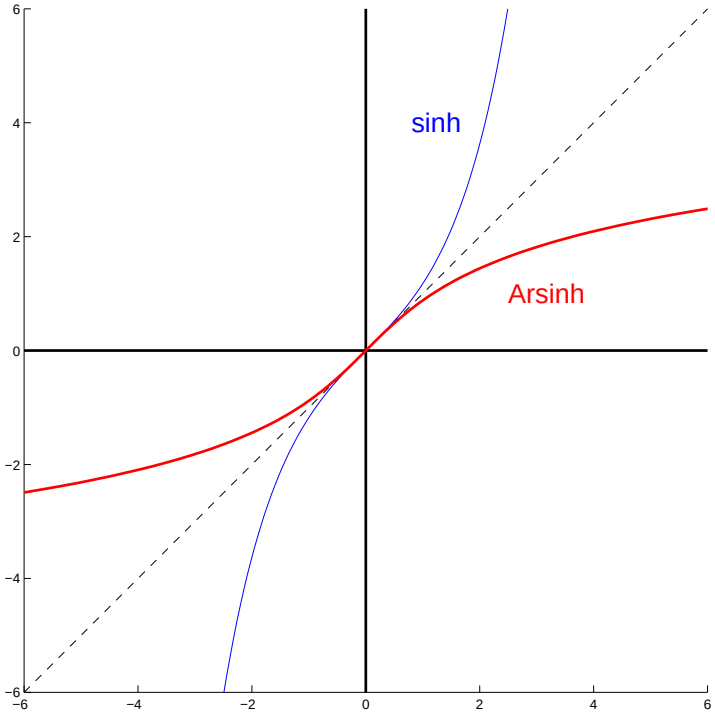
$$\text{Arsinh}(y) := \text{ Lösung } t \text{ der Gleichung 'sinh}(t) = y\text{'} = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Areafunktionen II

Arsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von sinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. es ist stets

$$\text{Arsinh}(\sinh(t)) = t, \qquad \sinh(\text{Arsinh}(y)) = y.$$

Den Graphen von Arsinh erhält man durch Spiegelung des Graphen von sinh an der Diagonale:



Areafunktionen III

Berechnung der Ableitung von Arsinh:

Allgemeine Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Für $f = \sinh$, $f^{-1} = \mathrm{Arsinh}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arsinh}'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\mathrm{Arsinh}(y))} \\
&= \frac{1}{\cosh(\mathrm{Arsinh}(y))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\mathrm{Arsinh}(y))}} \qquad (\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1,\ \cosh(z)>0 \ \Rightarrow \\
&\qquad\qquad \cosh(z)=\sqrt{1+\sinh^2(z)}\ ) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(\mathrm{Arsinh}(y))\sinh(\mathrm{Arsinh}(y))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}$$

Vergleiche mit der Ableitung von Arcussinus: $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Areafunktionen IV

Arcosh und Artan sind die Umkehrfunktionen von cosh und tanh.

Formeln:

$$\text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (x \geq 1),$$

$$\text{Artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (|x| < 1)$$

Mehr Infos dazu im Skript und in Formelsammlungen (z.B. Bronstein)