Vorlesung: Analysis I für Ingenieure

Michael Karow

Thema: Winkelfunktionen

Beispiel: Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion

Wir haben $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
Daraus folgt für die Taylorentwicklung von sin bis zur 9. Ordnung

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(x_0) + \cos(x_0)(x-x_0) - \frac{\sin(x_0)}{2}(x-x_0)^2 - \frac{\cos(x_0)}{6}(x-x_0)^3 \\ &+ \frac{\sin(x_0)}{24}(x-x_0)^4 + \frac{\cos(x_0)}{120}(x-x_0)^5 - \frac{\sin(x_0)}{720}(x-x_0)^6 \\ &- \frac{\cos(x_0)}{7!}(x-x_0)^7 + \frac{\sin(x_0)}{8!}(x-x_0)^8 + \frac{\cos(x_0)}{9!}(x-x_0)^9 - \frac{\sin(\xi)}{10!}(x-x_0)^{10}\end{aligned}$$

Wegen $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ hat man speziell für $x_0 = 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{\sin(\xi)}{10!}x^{10}.$$

Die allgemeine Formel für die Taylor-Entwicklung von sin um den Punkt $x_0 = 0$ ist

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Bei festgehaltenem x konvergiert das Restglied gegen 0 für n gegen ∞. Folglich ist

$$\sin(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die Sinus und Cosinus als Taylor-Reihen (Potenzreihen)

Wir haben eben gezeigt, dass

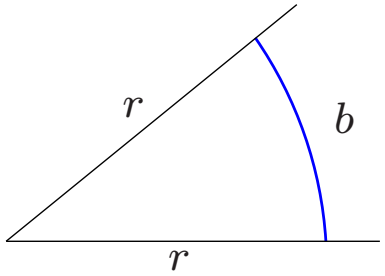
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots$$

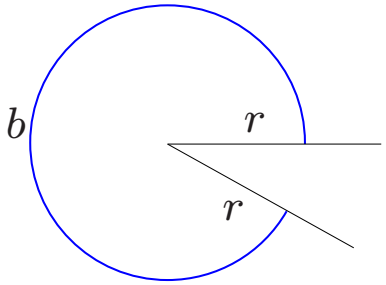
Analog zeigt man, dass

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots$$

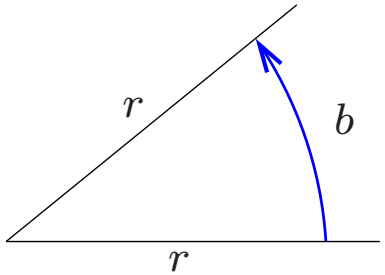
Das Bogenmaß I

$$\text{Bogenmaß eines Winkels} = \frac{\begin{array}{l}\text{Länge eines Kreisbogens,}\\ \text{der die Ränder des Winkels verbindet, und dessen}\\ \text{Mittelpunkt der Scheitelpunkt des Winkels ist}\end{array}}{\text{Radius des Kreisbogens}} = \frac{b}{r}$$

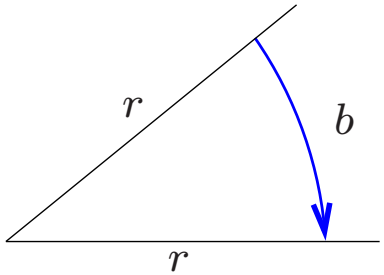




$$\text{Bogenmaß eines orientierten Winkels} = \begin{cases} \frac{b}{r} & \text{bei Orientierung } \textbf{gegen} \text{ den Uhrzeigersinn} \\ -\frac{b}{r} & \text{bei Orientierung } \textbf{im} \text{ Uhrzeigersinn} \end{cases}$$



positiver Winkel



negativer Winkel

Das Bogenmaß II

Umrechnung von Grad in Bogenmaß:

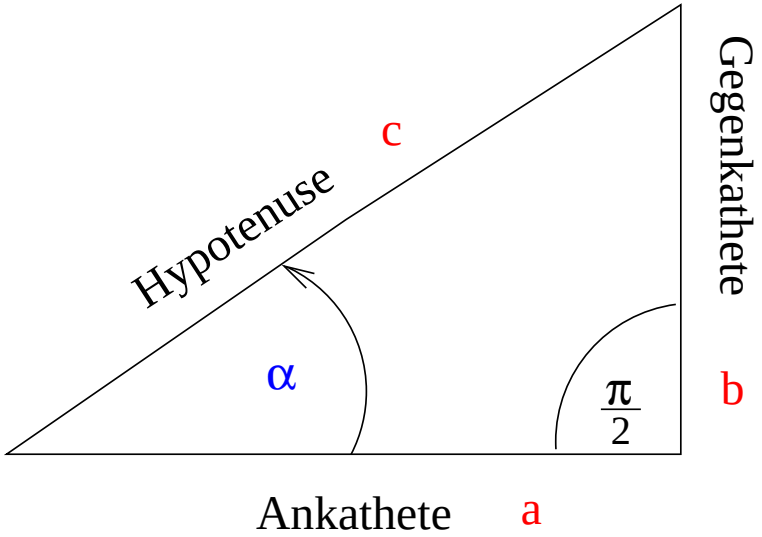
$$\text{Bogenmaß} = \frac{\pi}{180} \text{ Gradmaß}$$

$$\text{Gradmaß} = \frac{180}{\pi} \text{ Bogenmaß}$$

Wichtige Werte:

Gradmaß	360	180	120	90	60	45	30
Bogenmaß	2π	π	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen I



$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

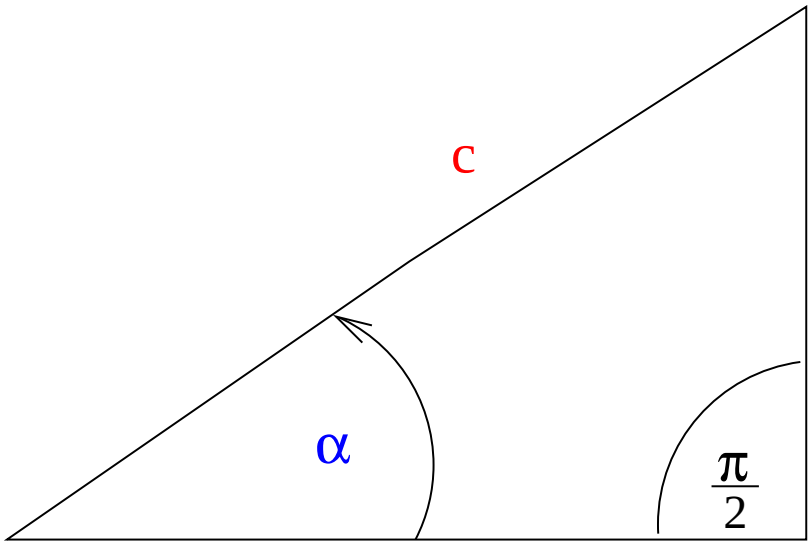
$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Gegenkathete}} = \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen II

Winkelfunktionen und Berechnung der Seitenlängen.

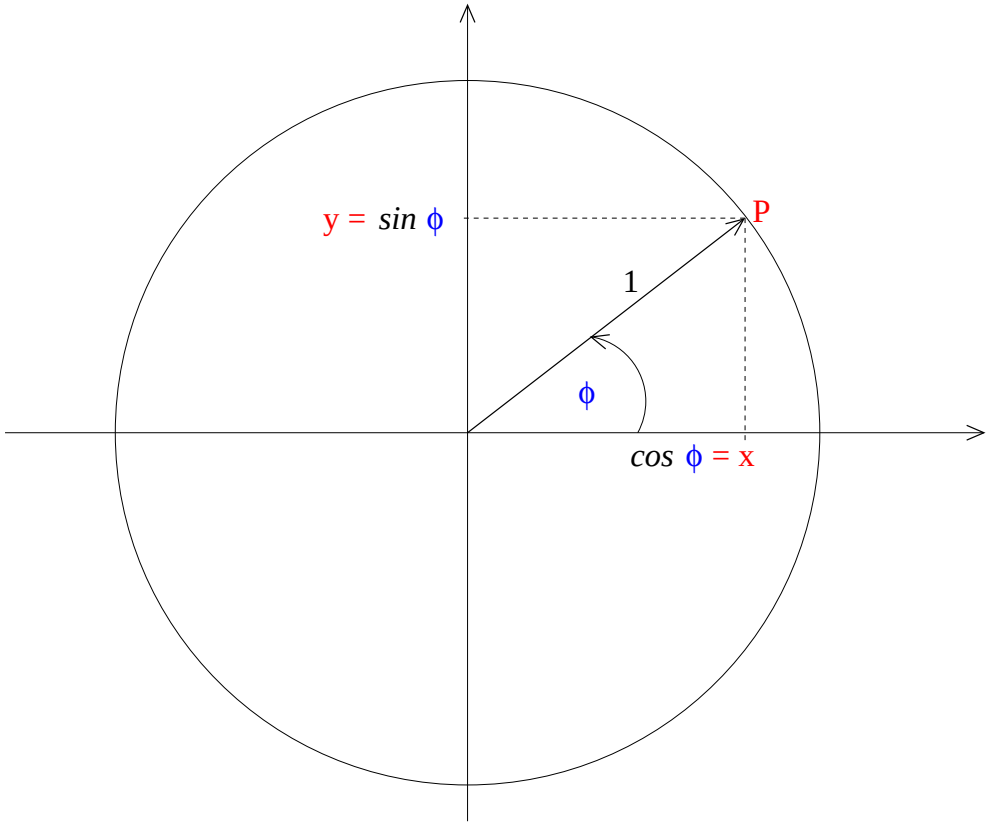


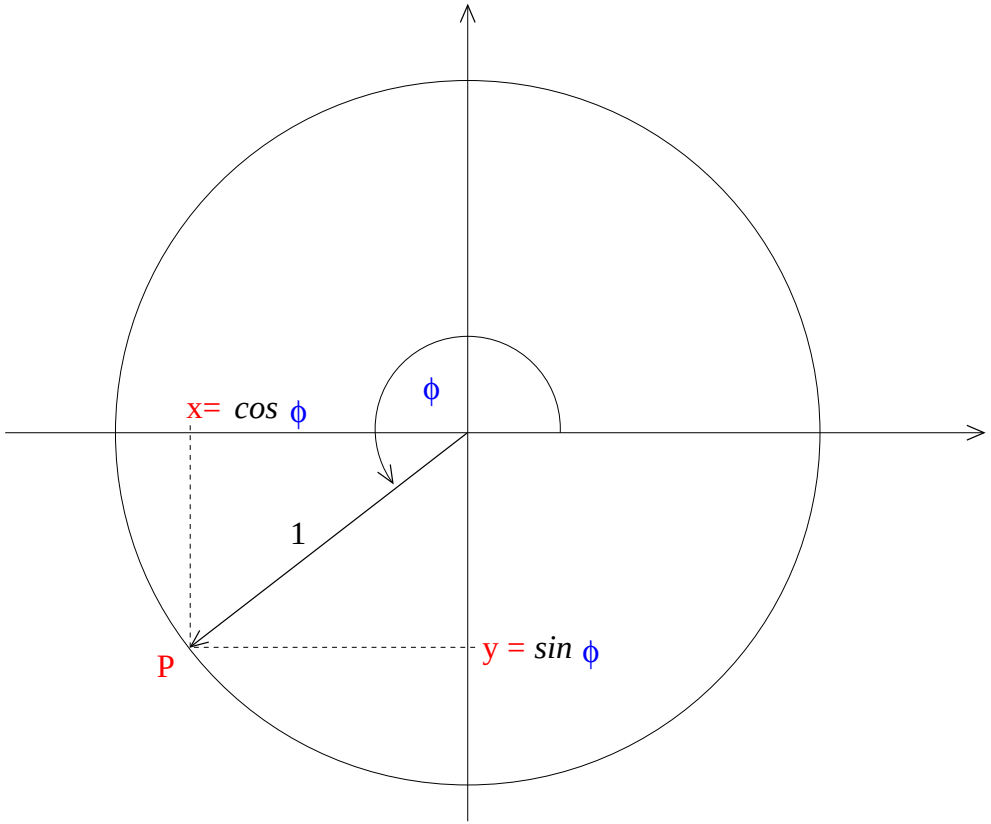
$b = c \cdot \sin\alpha$

$= a \cdot \tan\alpha$

$a = c \cdot \cos\alpha = b \cdot \cot\alpha$

Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen III



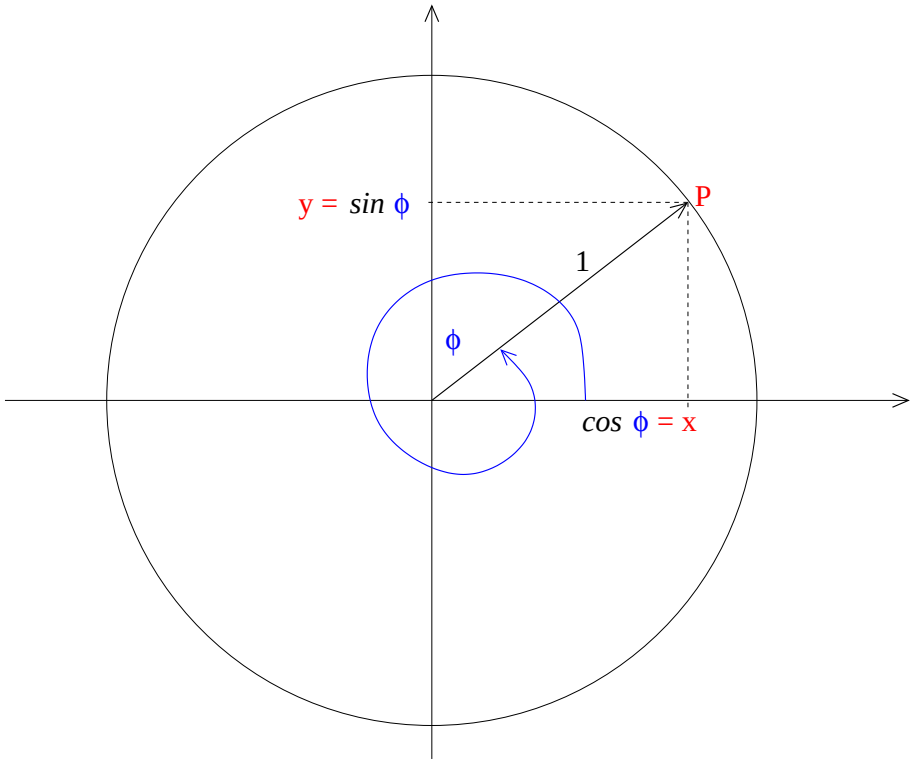


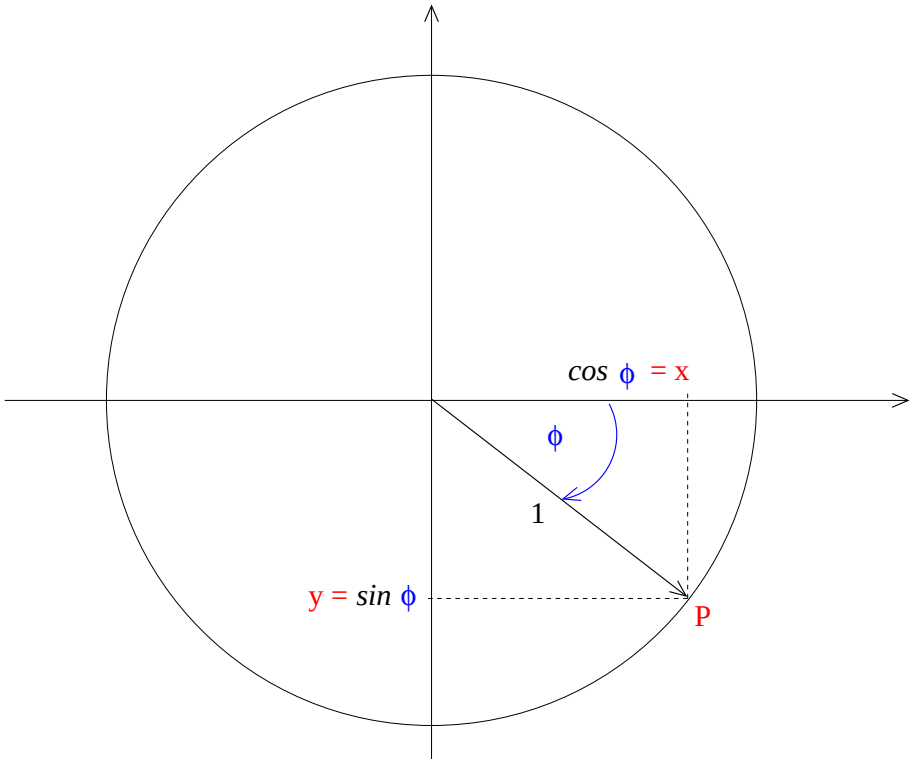
cos ϕ = **x-Koordinate** des Punktes P auf dem Einheitskreis, der zum Winkel ϕ gehört

sin ϕ = **y-Koordinate** des Punktes P auf dem Einheitskreis, der zum Winkel ϕ gehört

Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen III

Definition gilt auch für Winkel $> 2\pi$ und für negative Winkel.





$\cos\,\phi$ = x-**Koordinate** des Punktes P auf dem Einheitskreis, der zum Winkel ϕ gehört

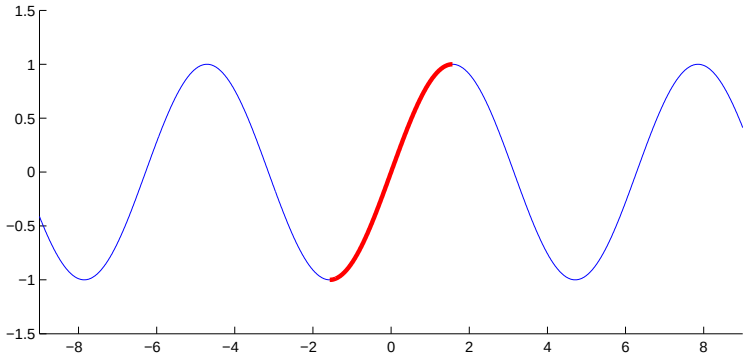
$\sin\,\phi$ = y-**Koordinate** des Punktes P auf dem Einheitskreis, der zum Winkel ϕ gehört

Periodizität: $\cos(\phi + 2\pi) = \cos(\phi)$, $\sin(\phi + 2\pi) = \sin(\phi)$

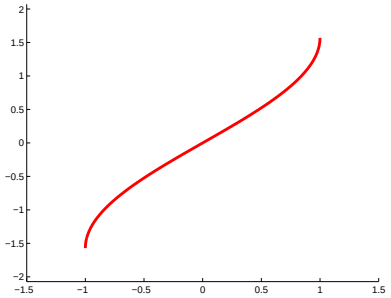
Vorzeichenregeln: $\cos(\phi) = \cos(-\phi)$, $\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$.

Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen IV

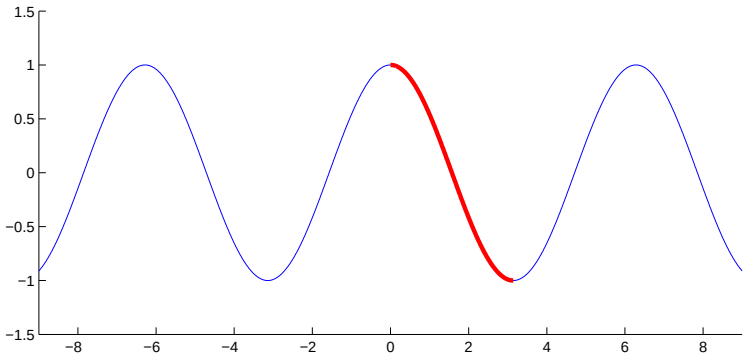
Sinus:



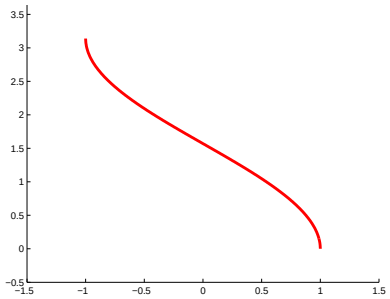
Arcus Sinus:



Cosinus:

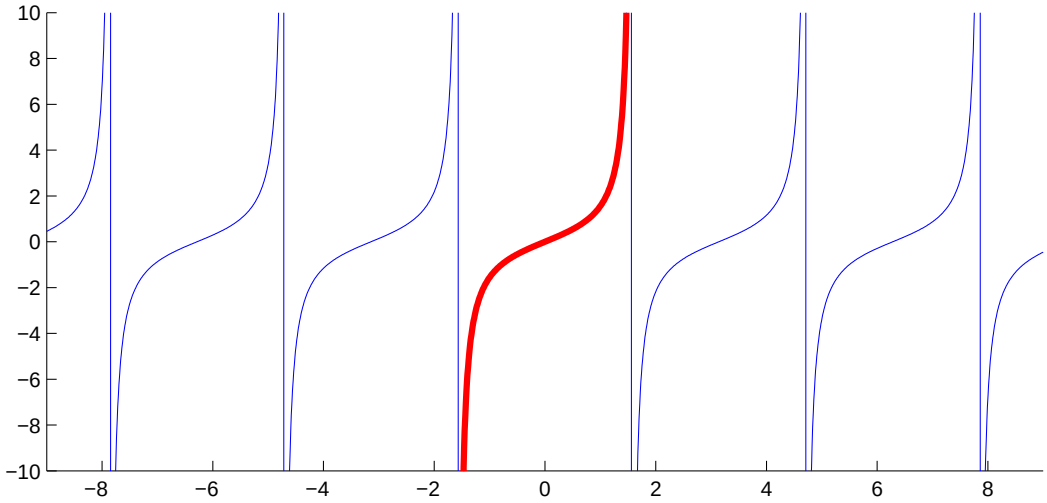


Arcus Cosinus:

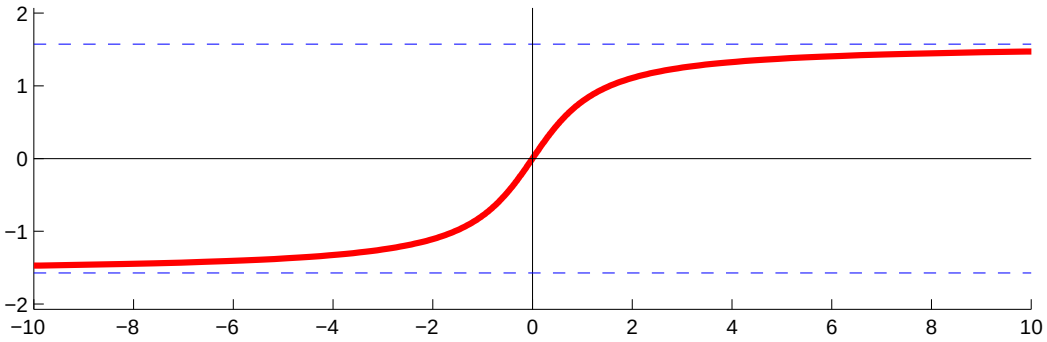


Elementargeometrische Definition der Winkelfunktionen V

Tangens:

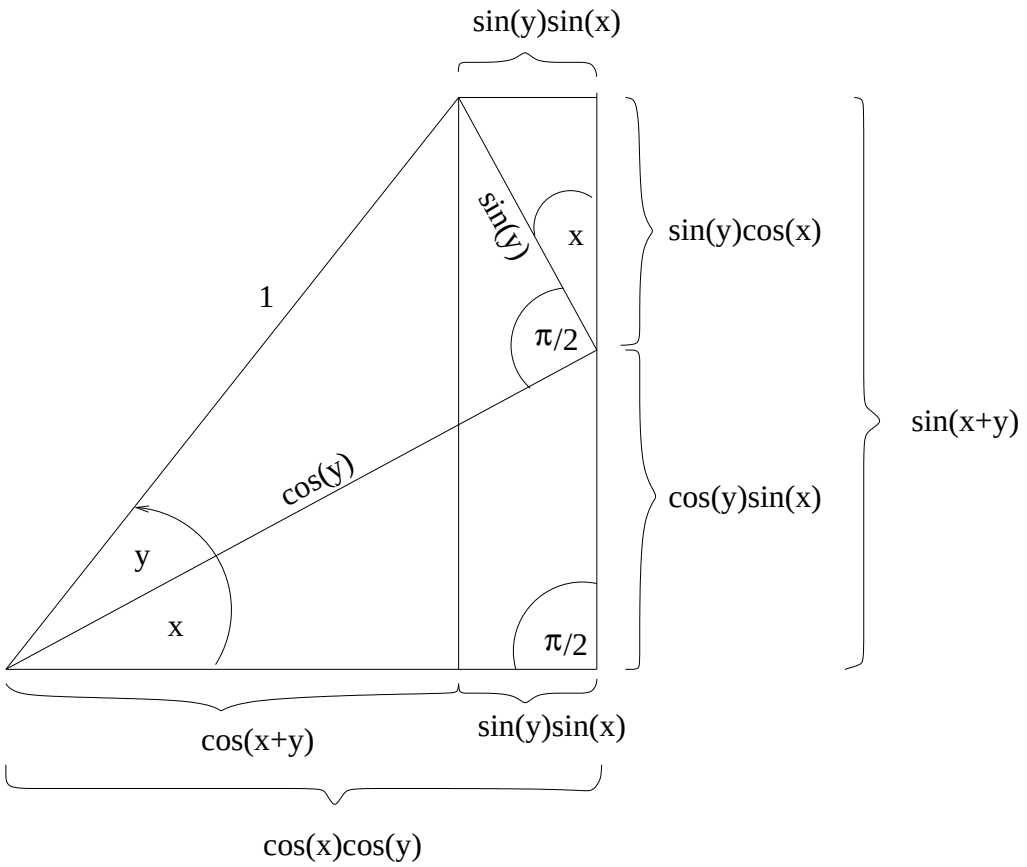


Arcustangens:



Die Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\,sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\,sin(y). \end{aligned}$$

Elementargeometrischer Beweis: