

Vorlesung: Analysis I für Ingenieure

Michael Karow

Thema: Satz von Taylor

Die Taylor-Entwicklung I

Satz von Taylor. Sei $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 n -mal differenzierbar. Dann gilt für $x \in D$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Restglied}},$$

wobei

$$R(x) = r(x)(x - x_0)^n \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0. \quad \left(\text{Es ist also } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \right)$$

Falls f zwischen x und x_0 sogar $(n + 1)$ -mal differenzierbar ist, hat man

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{Lagrange-Form des Restglieds}),$$

wobei ξ eine (nicht näher bekannte) Zahl zwischen x und x_0 ist.

Bemerkungen:

- Das Taylor-Polynom ist das eindeutige Polynom vom Grad $\leq n$, welches an der Stelle x_0 denselben Funktionswert und dieselben ersten n Ableitungen wie f hat.
- Falls f selbst schon ein Polynom n -ten Grades ist, dann ist die $(n + 1)$ -te Ableitung von f die Nullfunktion. Also ist das Restglied 0 und man hat

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Die Taylor-Entwicklung II

- Die Taylor-Entwicklung von f um x_0 bis zur 1. Ordnung ist

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Gleichung der Tangente}} + R(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad R(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

- Die Taylor-Entwicklung von f um x_0 bis zur 3. Ordnung sieht so aus:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + R(x),$$

$$\text{wobei } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4.$$

- Die Taylor-Entwicklung in anderer Schreibweise:

Mit den neuen Bezeichnungen $x - x_0 := h$, $R(x) \rightsquigarrow R(h)$ ist

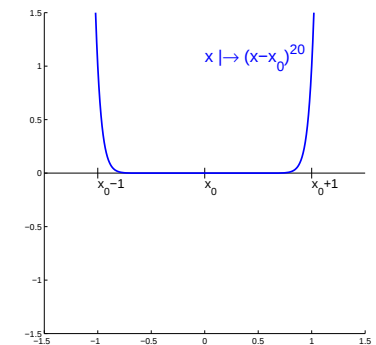
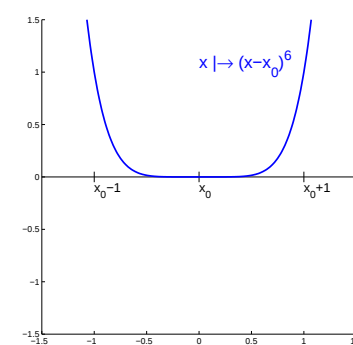
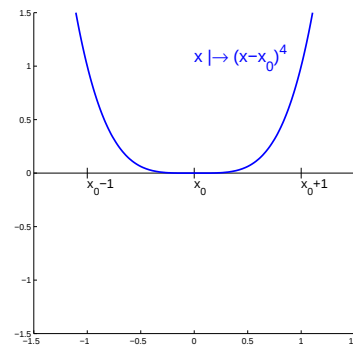
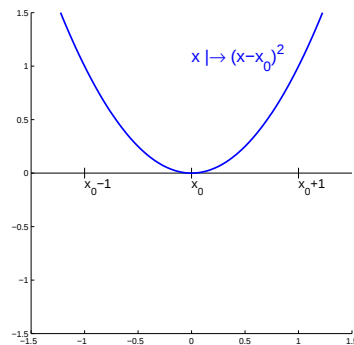
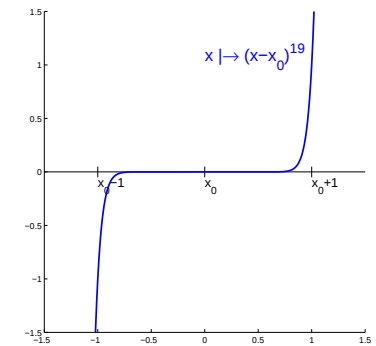
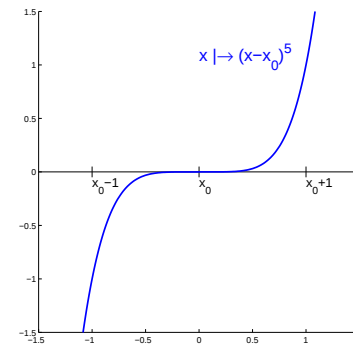
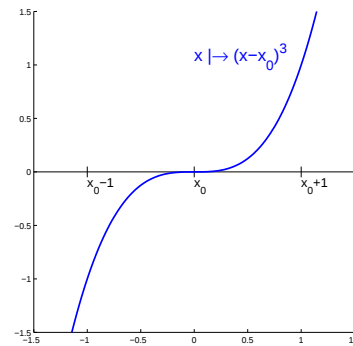
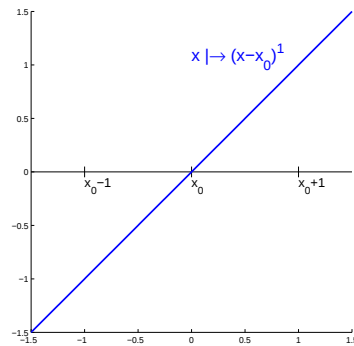
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + R(h),$$

$$\text{wobei } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h^3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad R(h) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^4$$

Die Taylor-Entwicklung III

Das Taylor-Polynom ist eine Linearkombination der Funktionen $x \mapsto (x - x_0)^n$.

Diese Funktionen sehen so aus:



Merke:

Je größer n desto flacher ist die Funktion $x \mapsto (x - x_0)^n$ in der Nähe von x_0 .

Wenn n gerade, dann nimmt $x \mapsto (x - x_0)^n$ an der Stelle x_0 das globale Minimum 0 an.

Wenn n ungerade, dann hat $x \mapsto (x - x_0)^n$ kein Minimum und kein Maximum.

Lokale Maxima und Minima

Satz. Sei $x_0 \in R$ ein innerer Punkt des Definitionsbereiches von $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und sei

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (*)$$

Dann gilt folgendes.

- n ungerade $\Rightarrow x_0$ ist keine Extremalstelle.
- (n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$) $\Rightarrow$ striktes lokales Minimum an der Stelle x_0 .
- (n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$) $\Rightarrow$ striktes lokales Maximum an der Stelle x_0 .

Begründung mit Satz von Taylor:

Wegen (*) sind die mittleren Terme im Taylor-Polynom =0. Also

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x) & R(x) &= r(x)(x - x_0)^n, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + r(x)(x - x_0)^n = f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + r(x) \right)}_{=g(x)} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Ob in x_0 ein lokales Extremum vorliegt, hängt davon ab, welches Vorzeichen der Term $g(x)(x - x_0)^n$ hat. Ist das Vorzeichen stets positiv (negativ), liegt ein striktes lokales Minimum (Maximum) vor. Wechselt das Vorzeichen, in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 , dann liegt kein Extremum vor. Wegen $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ haben aber $g(x)$ und $f^{(n)}(x_0)$ dasselbe Vorzeichen, wenn x hinreichend nahe bei x_0 liegt. Das Vorzeichen von $g(x)(x - x_0)^n$ hängt dann nur vom Vorzeichen von $(x - x_0)^n$ und $f^{(n)}(x_0)$ ab.

Beispiel: Taylor-Entwicklung der Sinus-Funktion

Wir haben $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Daraus folgt für die Taylorentwicklung von sin bis zur 9. Ordnung

$$\begin{aligned}\sin(x) = & \sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0) - \frac{\sin(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{\cos(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \\ & + \frac{\sin(x_0)}{24}(x - x_0)^4 + \frac{\cos(x_0)}{120}(x - x_0)^5 - \frac{\sin(x_0)}{720}(x - x_0)^6 \\ & - \frac{\cos(x_0)}{7!}(x - x_0)^7 + \frac{\sin(x_0)}{8!}(x - x_0)^8 + \frac{\cos(x_0)}{9!}(x - x_0)^9 - \frac{\sin(\xi)}{10!}(x - x_0)^{10}\end{aligned}$$

Wegen $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ hat man speziell für $x_0 = 0$,

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{\sin(\xi)}{10!}x^{10}.$$

Die allgemeine Formel für die Taylor-Entwicklung von sin um den Punkt $x_0 = 0$ ist

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Bei festgehaltenem x konvergiert das Restglied gegen 0 für n gegen ∞ . Folglich ist

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die Sinus und Cosinus als Taylor-Reihen (Potenzreihen)

Wir haben eben gezeigt, dass

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots$$

Analog zeigt man, dass

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots$$

Einschub: Beweis des Satzes von Taylor mit Lagrange-Restglied

Beweis wird folgendermaßen aufgebaut:

- (1) Satz von der Existenz von Extremwerten von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen.

$\Rightarrow$

- (2) Satz von Rolle.

$\Rightarrow$

- (3) Mittelwertsatz.

- (4) Anwendung des Mittelwertsatzes auf eine geeignete Funktion

$\Rightarrow$ Satz von Taylor.

Der Satz von Rolle

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ausserdem sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in]a, b[$, so dass $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Da f stetig ist, nimmt f das globale Maximum an mindestens einer Stelle $\xi \in [a, b]$ an.

Angenommen $f(x) > 0$ für mindestens ein $x \in]a, b[$.

Dann liegt (wegen $f(a) = f(b) = 0$) die Maximalstelle ξ in $]a, b[$.

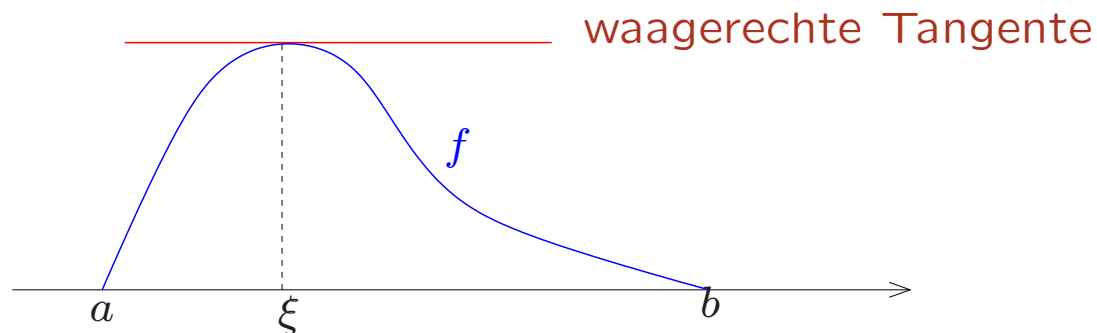
Es folgt, dass $f'(\xi) = 0$.

Analog argumentiert man, wenn $f(x) < 0$ für mindestens ein x .

Dann liegt nämlich eine Minimalstelle ξ in $]a, b[$.

Wenn beide Fälle nicht eintreten, dann ist f die Nullfunktion, und folglich ist $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in [a, b]$.

Bild zum ersten Fall:

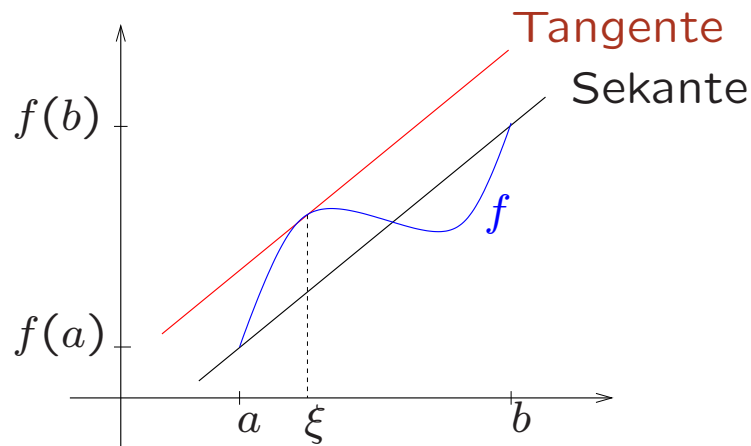


Der Mittelwertsatz:

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Dann gibt es (mindestens) ein $\xi \in]a, b[$, so dass

$$f'(\xi) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Sekantensteigung}}.$$



Beweis:

Gleichung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$, $(b, f(b))$:

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad s'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Für die Differenzfunktion $d(x) := s(x) - f(x)$ gilt $d(a) = d(b) = 0$.

Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in]a, b[$ so dass

$$0 = d'(\xi) = s'(\xi) - f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi).$$

Beweis des Satzes von Taylor mit Lagrange-Restglied durch Anwendung des Mittelwertsatzes

Ansatz:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{\rho (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

Dabei ist $\rho \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die so gewählt ist, dass die Gleichung stimmt.

Definiere:

$$F(t) := f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k + \rho (x - t)^{n+1}$$

Dann ist $F(x) = F(x_0) = f(x)$ und

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right) - (n+1) \rho (x - t)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n - (n+1) \rho (x - t)^n = \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - (n+1) \rho \right) (x - t)^n \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und x_0 (aber $x_0 \neq \xi \neq x$), so dass

$$0 = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(\xi) = \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1) \rho \right) \underbrace{(x - \xi)^n}_{\neq 0}.$$

Daraus folgt $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1) \rho = 0$, also $\rho = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.