Vorlesung: Analysis I für Ingenieure

Dozent: Dr. Michael Karow

Sprechstunde: Mittwoch 14-16 in MA 470

Kursinhalt von Analysis I:

Vollständige Induktion, Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung in einer Variablen.

Zum größten Teil Wiederholung und Ergänzung von Schulstoff.

Alle **Informationen und Materialien** zum Kurs findet man auf der WWW-Seite

`https://www.isis.tu-berlin.de/course/view.php?id=1877`

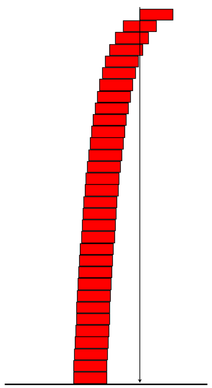
Einloggen über

`http://www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/`

MOSES=Mobile Service for Students
ISIS= Information System for Instructors and Students

Technische Universität Berlin
Fakultät II • Institut für Mathematik
Prof. Dr. Dirk Ferus

Analysis I für Ingenieure



Information. Für die erfolgreiche Teilnahme an diesem Modul erhalten Sie

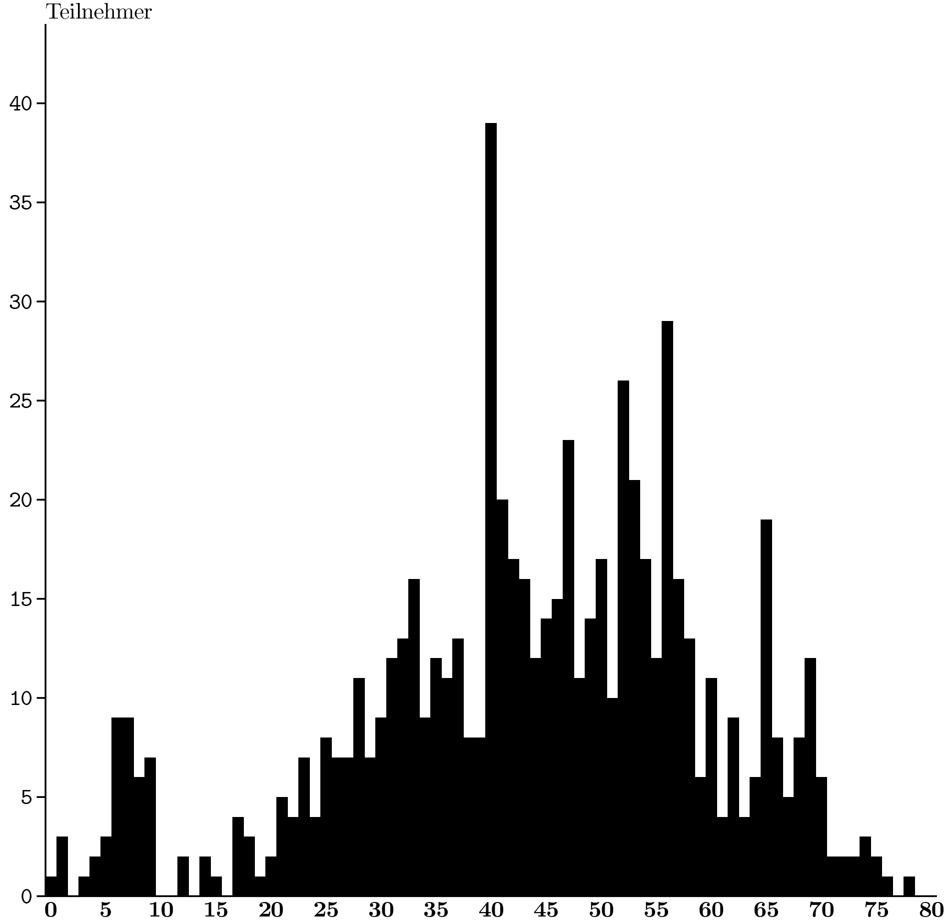
8 Leistungspunkte nach ECTS.

Entsprechend erwarten wir von durchschnittlich begabten und vorgebildeten Studierenden folgenden Arbeitsaufwand:

Vorlesung	4h/Woche
Übung	2h/Woche
Häusliche Nacharbeit und Hausaufgaben	8h/Woche
Klausurvorbereitung	30h

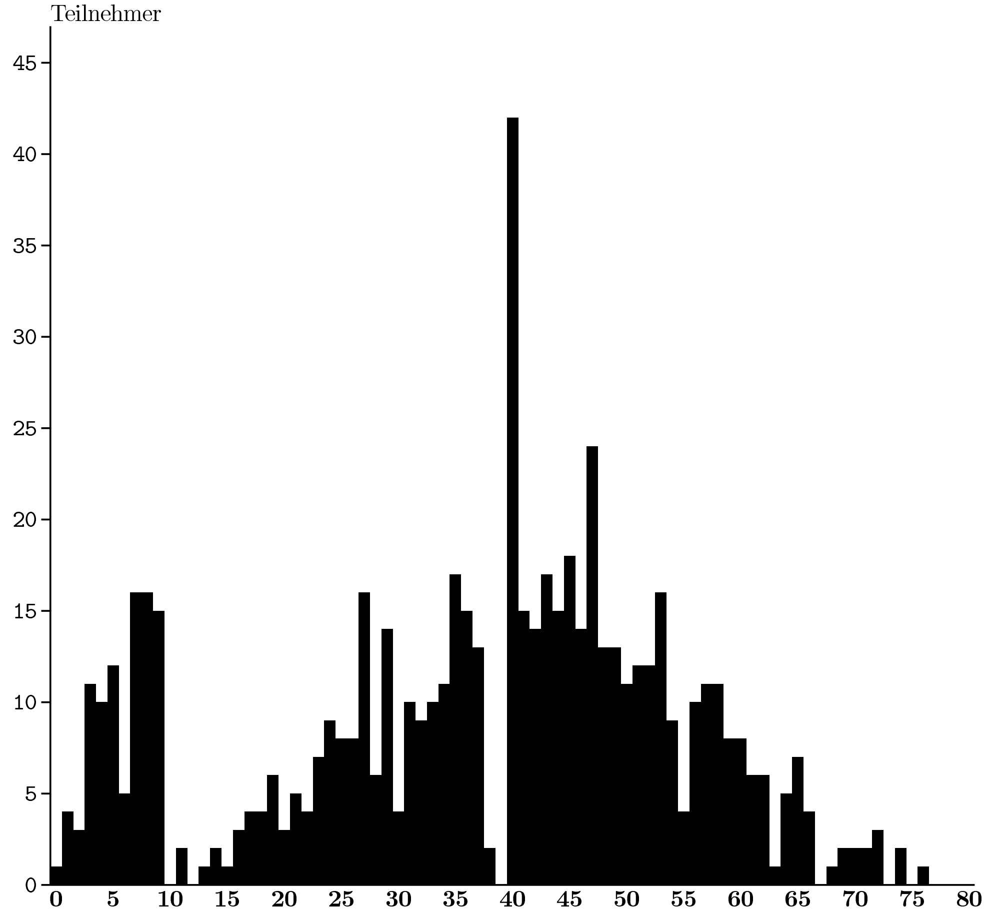
Version vom 23.01.2007

Prüfungsklausur Ana1 (0230 L 007/8) vom 16.02.2009



Teilnehmer: 680
Bestanden (erstens 40.0 Punkte insgesamt und zweitens sowohl 12.0 Punkte im Rechenteil als auch 12.0 im Verständnisteil): 453 (66.6%)
Durchschnittliche Punktzahl: 43.8 (von 80.0)
Stand: 20. Februar 2009

Prüfungsklausur Ana1 (0230 L 007/8) vom 06.04.2009



Teilnehmer: 626
Bestanden (erstens 40.0 Punkte insgesamt und zweitens sowohl 12.0 Punkte im Rechenteil als auch 12.0 im Verständnisteil): 339 (54.2%)
Durchschnittliche Punktzahl: 36.9 (von 80.0)
Stand: 9. April 2009

Hausaufgaben:

Wöchentlich, Ausgabe freitags auf der ISIS-Seite,
Besprechung und **Abgabe im Tutorium**,
Bearbeitung in 3er Gruppen.

Ab dem 2. Übungsblatt gibt es Programmieraufgaben in Scilab

Klausur:

rechtzeitig anmelden (siehe ISIS-Seite)
Zulassungsvoraussetzung: 50% der Punkte bei den Hausaufgaben.

Dozenten:	Prof. D. Hömberg, Dr. W. Böse, Dr. M. Karow
AssistenInnen:	Dr. K. Roegner, Dr. K. Kulas, Dr. K. Skutella, A. Uschmajew

Zuständigkeiten:

Dozenten	Vorlesung, fachliche Fragen
AssistenInnen	Aufgabenblätter, Klausuren, Tutorienorganisation, organisatorische und fachliche Fragen
TutorInnen	Tutorien, Hausaufgaben- und Klausurkorrektur, fachliche Fragen

Service-Zentrum in MA 708:

Noten, Übungsscheine, Prüfungstermine, Moses-Konto

Forum im WWW (für Fragen aller Art)

`http://www.moses.tu-berlin.de/forum`

Mengen Die Schreibweise $a \in A$ bedeutet 'a ist Element der Menge A'. $a \notin A$ bedeutet 'a ist kein Element der Menge A'. Mengen kann man dadurch beschreiben, dass man ihre Elemente in geschweiften Klammern auflistet:

$$
\begin{array}{rcll}
M & := & \{2, 3\} & \\
S & := & \{7\} & \text{Merke: } \{7\} \neq 7 \\
\emptyset & := & \{\} & \text{leere Menge} \\
\mathbb{N} & := & \{0, 1, 2, 3, \ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen} \\
G & := & \{0, 2, 4, 6, \ldots\} & \text{Menge der geraden natürlichen Zahlen} \\
\mathbb{Z} & := & \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} & \text{Menge der ganzen Zahlen.}
\end{array}
$$

Oft beschreibt man Mengen aber durch eine Eigenschaft, die ihre Elemente haben, oder durch eine Bildungsvorschrift:

$$
\begin{array}{rcll}
G & = & \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ ist gerade}\} = \{2k |\ k \in \mathbb{N}\} & \\
U & = & \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ ist ungerade}\} = \{2k + 1 |\ k \in \mathbb{N}\} & \\
\mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{a}{b} \middle|\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\} & \text{Menge der rationalen Zahlen.}
\end{array}
$$

Das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen, d.h. aller rationalen und irrationalen Zahlen. Z.B. hat man

$$
\frac{-3}{7} \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \qquad \pi = 3,14159\ldots \in \mathbb{R}.
$$

Wenn jedes Element der Menge B auch Element von A ist, so schreibt man $B \subset A$ (B ist Teilmenge von A) oder auch $A \supset B$. Z.B. ist

$$\left\{\frac{-3}{7}, \sqrt{2}, \pi\right\} \subset \mathbb{R} \qquad \emptyset \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{R} \subset \mathbb{R}.$$

Die Symbole $\infty = +\infty$ und $-\infty$ stehen für 'unendlich' und 'minus unendlich'. Dies sind keine reellen Zahlen:

$$\infty \notin \mathbb{R}, \quad -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Notation von Intervallen: siehe Skript.

Rechenoperationen mit Mengen:

$$\begin{array}{rcll} A \cup B & := & \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} & \text{(Vereinigungsmenge)} \\ A \cap B & := & \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} & \text{(Schnittmenge)} \\ A \setminus B & := & \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} & \text{(Differenzmenge)} \\ A \times B & := & \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\} & \text{(cartesisches Produkt)} \end{array}$$

Dabei ist (a,b) ein geordnetes Paar. Sei $a \neq b$. Dann gilt

$$(a,b) \neq (b,a) \qquad \text{aber} \qquad \{a,b\} = \{b,a\}.$$

Beispiele:

1. $[3,7] \cup [6,10[= [3,10[, \qquad [3,7[\cap [6,10[= [6,7[, \qquad [3,7[\setminus [6,10[= [3,6[.$

2. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 3 teilbar}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 6 teilbar}\}.$

3. $\{1,4\} \times \{8,2\} = \{(1,8),(1,2),(4,8),(4,2)\}.$

Einige Rechenregeln:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$

Verallgemeinerungen der Rechenoperationen:

$$\begin{array}{rcll} \bigcup_{i \in I} A_i & := & \{x \mid x \in A_i \text{ für mindestens ein } i \in I\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i & := & \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}. \\ A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n & = & \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\} & \text{(Menge der geordneten } n\text{-tupel).} \end{array}$$

Abbildungen (Funktionen, Zuordnungen)

Zu einer Abbildung f gehören ein Definitionsbereich A, ein Wertebereich (Wertevorrat) B und eine Zuordnungsvorschrift. Man schreibt

$$f : A \to B \qquad \text{und} \qquad x \mapsto f(x).$$

Dabei ist $f(x) \in B$ der dem Element $x \in A$ zugeordnete Funktionswert (das Bild von x). Der Graph von f ist die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$:

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

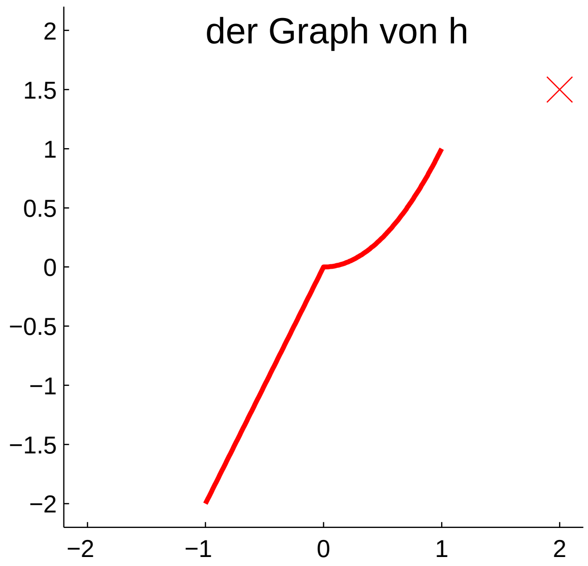
Beispiel 1: $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad f_1(x) := x^2.$

Beispiel 2: $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) := x^2.$

Bemerkung: Es ist $f_1 \neq f_2$ (unterschiedliche Definitions- und Wertebereiche)

Beispiel 3: Sei $A = [-1, 1] \cup \{2\}$. Wir definieren eine Abbildung $h : A \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 & \text{falls } 0 < x \leq 1, \\ 3/2 & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$



Die Begriffe Bild und Urbild

Sei $f : A \to B$ eine Funktion.

Wenn $M \subset A$, dann heisst die Menge

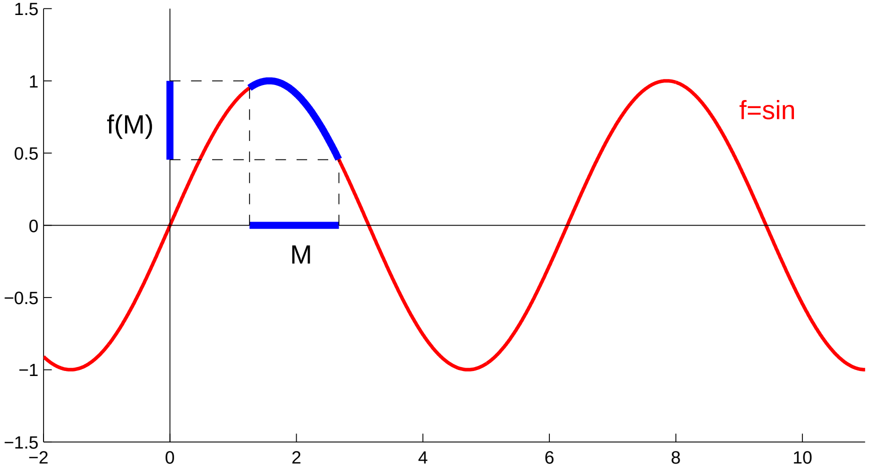
$$f(M) = \{f(x) |\ x \in M\}$$

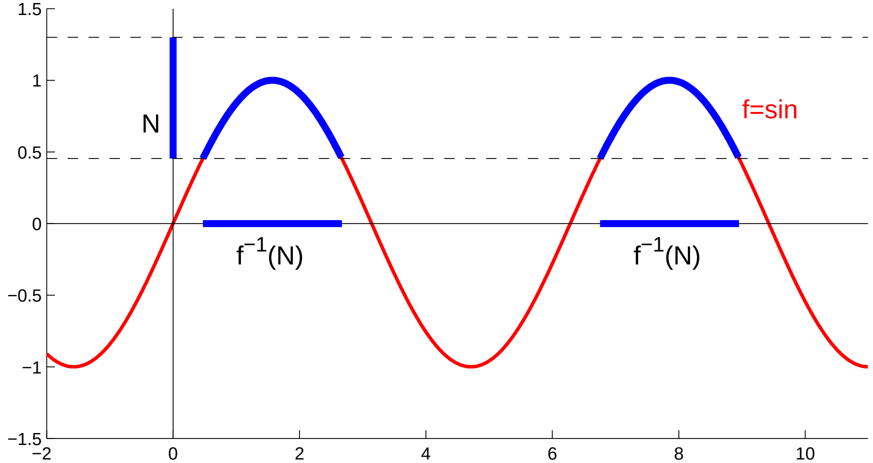
das f-Bild von M.

Wenn $N \subset B$, dann heisst die Menge

$$f^{-1}(N) = \{x \in A |\ f(x) \in N\}$$

das f-Urbild von N.





Die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Funktion $f : A \to B$ heisst

1. injektiv, falls verschiedene Elemente von A verschiedene Funktionswerte haben.

   Alternative Formulierung 1: f ist injektiv, falls aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

   Alternative Formulierung 2: f ist injektiv, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.

2. surjektiv, wenn jedes Element $y \in B$ als Funktionswert vorkommt.

   Alternative Formulierung:
   f ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$.

3. bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Weitere alternative Formulierungen:

Eine Funktion $f : A \to B$ heisst

1. injektiv falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ **höchstens eine** Lösung $x \in A$ hat.

2. surjektiv falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ **mindestens eine** Lösung $x \in A$ hat.

3. bijektiv falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ **genau eine** Lösung $x \in A$ hat.

Wichtige Bemerkung: Wenn $f : A \to B$ injektiv ist, dann ist $f : A \to f(A)$ bijektiv.

Die Umkehrfunktion (Inverse Funktion, Umkehrabbildung)

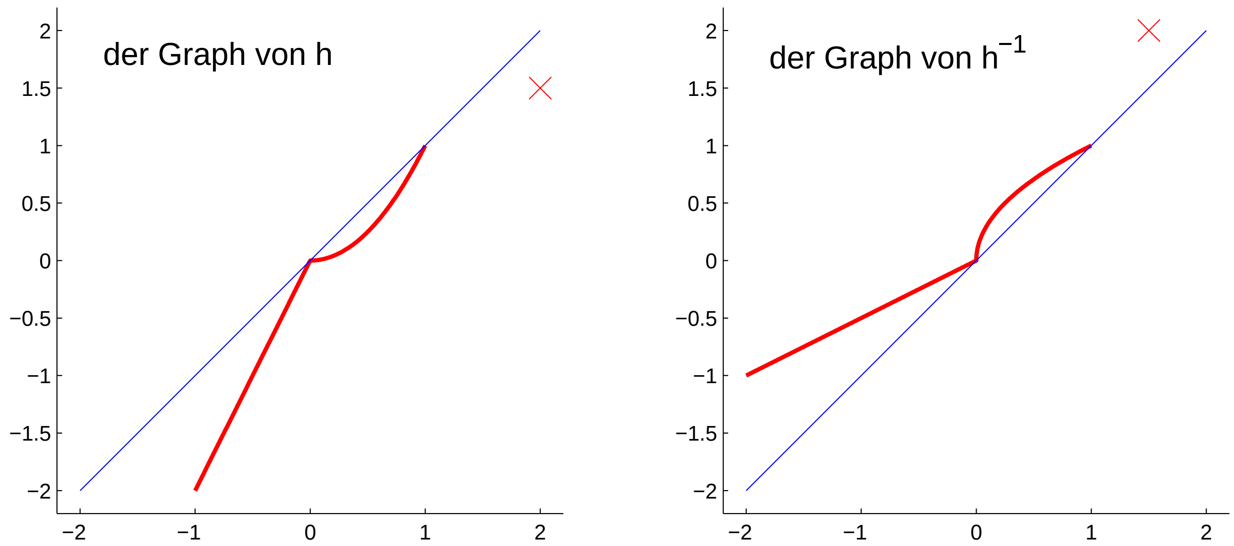
Jede bijektive Funktion $f : A \to B$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$.
Dabei ist

$$f^{-1}(y) := \text{das eindeutig bestimmte Element } x \in A, \text{ für das } f(x) = y \text{ gilt.}$$

Alternative Formulierung: $f^{-1}(y)$ ist die eindeutige Lösung x der Gleichung $f(x) = y$.

Bemerkung: Wenn f bijektiv ist, dann erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}, indem man den Graphen von f an der Diagonale des x, y-Diagramms spiegelt.

Beispiel: Umkehrfunktion der einige Seiten vorher definierten Funktion h:



Beispiel: Die Einschränkung der Sinus-Funktion auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$

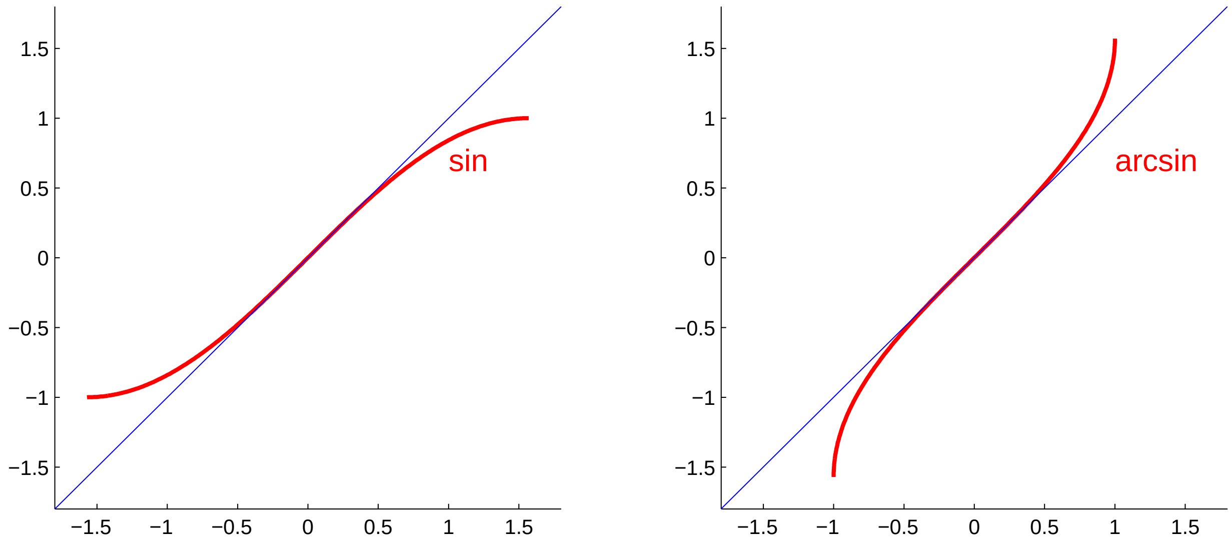
$$\left(\text{Notation:} \qquad \sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \quad \right)$$

ist bijektiv, d.h.

die Gleichung $\sin(x) = y$ hat für jedes $y \in [-1, 1]$ eine eindeutige Lösung $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Die Umkehrfunktion ist die Arcus-Sinus-Funktion. Notation:

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$



Komposition (Verkettung) von Funktionen (Abbildungen)

Die Komposition zweier Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist folgendermaßen definiert:

$$g \circ f : A \to C, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad \text{lies: } g \text{ nach } f, \text{ oder } g \text{ Kringel } f.$$

Beispiele: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2 - x + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= x^6 - x^3 + 1, & (f \circ g)(x) &= (x^2 - x + 1)^3, \\
(\sin \circ f)(x) &= \sin(x^3), & (f \circ \sin)(x) &= (\sin(x))^3, \\
(\sin \circ g)(x) &= \sin(x^2 - x + 1), & (g \circ \sin)(x) &= (\sin(x))^2 - \sin(x) + 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für bijektive Funktionen gilt stets

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$