

---

## Halbgruppen

Sei  $G$  eine Menge,  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  und  $e \in G$ . Es gelte

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in G$ .
- $a \cdot e = e \cdot a = a$  für alle  $a \in G$ .

Dann heißt  $G$  eine Halbgruppe mit neutralem Element  $e$ .

$G$  heißt kommutativ (oder abelsch), wenn  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in G$  gilt.

Das Element  $b$  heißt Inverses von  $a$  und  $a$  invertierbar in  $G$ , wenn  $a \cdot b = b \cdot a = e$  gilt.

---

## Halbgruppen

Beispiel:

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- In  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  sind nur  $1, -1$  invertierbar. In  $(\mathbb{Z}, +)$  sind alle Elemente invertierbar:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

Beispiel:

- Strings  $A^*$  und Aneinanderhängen  $\cdot$ . EINS  $\cdot$  ZWEI = EINSZWEI.
- ZWEI  $\cdot$  EINS = ZWEIEINS. Sind ungleich, daher nicht kommutativ.
- Neutrales Element: Der leere String.
- Inverse Elemente: Gibt es für nicht-leere Strings nicht.

---

## Halbgruppen und Gruppen

Kürzungsregel für invertierbares  $c$  mit Inversem  $d$ :

- Aus  $ac = bc$  folgt  $a = b$ , denn es gilt  $a = (ac)d = (bc)d = b$ .
- Aus  $ca = cb$  folgt  $a = b$ , denn es gilt  $a = d(ca) = d(cb) = b$ .

Neutrale Elemente und Inverse sind eindeutig:

- $e_1 = e_1 e_2 = e_2$ , aus  $cd_1 = e = cd_2$  folgt durch Kürzen  $d_1 = d_2$ .

Kombinierte Inverse:

- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ,  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

Eine Gruppe  $G$  ist eine Halbgruppe mit neutralem Element, in dem jedes Element invertierbar ist.

Das Inverse von  $c \in G$  wird mit  $c^{-1}$  bezeichnet.

Die Ordnung von  $G$  ist  $\#G$ .

---

## Gruppen

Minimale Axiome für eine Gruppe:

- $(ab)c = a(bc)$  für alle  $a, b, c \in G$ .
- Es gibt  $e \in G$  mit  $ea = a$  für alle  $a \in G$ . (Linksneutrales Element).
- Für jedes  $a \in G$  gibt es  $b \in G$  mit  $ba = e$ . (Linksinverses Element).

Bew: Sei  $b \in G$  mit  $ba = e$ .

1. Aus  $a^2 = a$  folgt  $a = e$ . Denn es gilt  $a = ea = (ba)a = b(aa) = ba = e$ .
2. Es gilt  $ab = e$ . Denn  $(ab)(ab) = a(ba)b = ab$  und nach 1 auch  $ab = e$ .
3. Es gilt  $ae = a$ . Denn  $ae = a(ba) = (ab)a = ea = a$ .

Die Existenz eines linksneutralen Elements und von linksinversen Elementen impliziert also, daß diese auch rechtsneutral und rechtsinvers sind.

---

## Homomorphismen von Gruppen

Seien  $G, H$  Gruppen mit den neutralen Elementen  $1_G, 1_H$  und  $f: G \rightarrow H$ . Es gelte  $f(ab) = f(a)f(b)$  für alle  $a, b \in G$ . Dann heißt  $f$  ein Homomorphismus.

Epimorphismus = surjektiv.

Monomorphismus = injektiv.

Isomorphismus = bijektiv.

Endomorphismus =  $H = G$ .

Automorphismus =  $H = G$  und bijektiv.

Es gilt:

- $f(1_G) = f(1_G)f(1_G)$ , daher  $f(1_G) = 1_H$  nach der Kürzungsregel.
- $1_H = f(1_G) = f(bb^{-1}) = f(b)f(b^{-1})$ , also  $f(b^{-1}) = f(b)^{-1}$  wegen der Eindeutigkeit der Inversen.

---

5

13. November 2008

---

## Untergruppen und Normalteiler

Ist  $U \subseteq G$  eine Gruppe und die Multiplikation in  $U$  die gleiche wie die in  $G$ , so heißt  $U$  eine Untergruppe von  $G$ .

Setze  $aU := \{au \mid u \in U\}$ ,  $Ua := \{ua \mid u \in U\}$ ,  $aUa^{-1} := \{aua^{-1} \mid u \in U\}$ .

Die Abbildungen  $u \mapsto au$ ,  $u \mapsto ua$ ,  $u \mapsto aua^{-1}$  sind bijektiv.

Gilt für eine Untergruppe  $U$  von  $G$  zusätzlich  $aUa^{-1} \subseteq U$  für alle  $a \in G$ , so heißt  $U$  normal in  $G$  bzw. ein Normalteiler von  $G$ . Hier gilt sofort  $aUa^{-1} = U$ , weil  $u \mapsto aua^{-1}$  bijektiv ist.

In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe normal, denn  $aua^{-1} = aa^{-1}u = u$  und  $aUa^{-1} = U$ .

---

6

13. November 2008

---

## Kerne und Bilder

Die Menge  $U := f^{-1}(\{1_H\})$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

- Für  $a, b \in U$  gilt  $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = 1_H$ , also  $ab^{-1} \in U$  und  $U$  ist eine Untergruppe von  $G$ .
- Für  $a \in G$  und  $b \in U$  gilt  $f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1}) = 1_H$ , also  $aba^{-1} \in U$ .

Man nennt  $U$  den Kern von  $f$  und schreibt  $U = \ker(f)$ .

$f$  ist ein Monomorphismus  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{1_G\}$ .

Die Menge  $V := f(G)$  ist eine Untergruppe von  $H$ .

- Für  $c, d \in V$  gibt es  $a, b \in G$  mit  $c = f(a)$ ,  $d = f(b)$ . Dann  $cd^{-1} = f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1})$ . Wegen  $ab^{-1} \in G$  folgt  $cd^{-1} \in V$ .

Man nennt  $V$  das Bild von  $f$  und schreibt  $V = \text{im}(f)$ .

$f$  ist ein Epimorphismus  $\Leftrightarrow \text{im}(f) = H$ .

---

7

13. November 2008

---

## Nebenklassen

Sei  $G$  eine Gruppe und  $U \subseteq G$  eine Untergruppe. Wir bezeichnen  $aU$  als eine Nebenklasse von  $U$  in  $G$ .

Thm (Lagrange): Die Menge  $\mathcal{U} = \{aU \mid a \in G\}$  ist eine Partition von  $G$  in Mengen gleicher Kardinalität,  $G$  ist also disjunkte Vereinigung der Nebenklassen  $aU$ .

Bew: Da  $u \mapsto au$  injektiv ist, gilt  $\#U = \#aU$  für alle  $a$ .

Für  $a \in G$  gilt  $a \in aU$  wegen  $e \in U$ , daher  $G = \cup_{a \in G} aU$ .

Ist  $c \in aU \cap bU$ , so gilt  $c = au_1 = bu_2$ , also  $a = bu_2u_1^{-1}$ . Dann  $a \in bU$  und  $aU = bU$ . Daher entweder  $aU = bU$  oder  $aU \cap bU = \{\}$ .  $\square$

Folgerung: Man nennt  $(G : U) = \#\mathcal{U}$  den Index von  $U$  in  $G$ . Es gilt  $\#G = (G : U)\#U$ .

---

8

13. November 2008

---

## Faktorgruppen

Sei  $G$  eine Gruppe und  $N \subseteq G$  ein Normalteiler.

Wir wollen in  $G$  modulo  $N$  rechnen. Zwei Elemente sollen als gleich gelten, wenn sie sich um ein Element aus  $N$  unterscheiden: Also wenn  $a = bn$  für ein  $n \in N$  bzw.  $a \in bN$ .

Wir betrachten die Nebenklassenzerlegung  $G/N = \{aN \mid a \in G\}$  und definieren  $aN \cdot bN = (ab)N$ .

- Dies ist wohldefiniert: Für  $a' \in aN$  und  $b' \in bN$  gilt  $a'N = aN$ ,  $b'N = bN$  und  $bN = Nb$  wegen  $bNb^{-1} = N$ , und dann  $(a'b')N = a'bN = a'Nb = aNb = (ab)N$ .
- $bN \cdot N = bN$  und  $N \cdot bN = bN$ , also ist  $N$  das neutrale Element.
- $bN \cdot b^{-1}N = (bb^{-1})N = N$ , also ist  $b^{-1}N$  das Inverse von  $bN$ .

Damit wird  $G/N$  eine Gruppe und  $f : G \rightarrow G/N, x \mapsto xN$  ein Epimorphismus (Restklassenhomomorphismus).

---

9

13. November 2008

---

## Beispiel

$G = \mathbb{Z}, U = 4\mathbb{Z}$  mit  $+$ . Dann  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0+4\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}, 3+4\mathbb{Z}\}$ .

Hier  $i+4\mathbb{Z} = \{i+4j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ .

Es gilt  $(2+4\mathbb{Z}) + (3+4\mathbb{Z}) = (2+3)+4\mathbb{Z} = (1+4)+4\mathbb{Z} = 1+4\mathbb{Z}$ .

Also modulo 4 Rechnen!

$G = \mathbb{Z}, H = \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, x \mapsto 5x+25\mathbb{Z}$ .

Dann  $\ker(f) = 5\mathbb{Z}$  und  $\text{im}(f) = \{5i+25\mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 4\}$ .

Stets  $\#(G/N) = (G : N)$ .

---

10

13. November 2008

---

## Isomorphiesatz

Thm: Ist  $f : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus, so ist  $h : G/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f), x\ker(f) \mapsto f(x)$  ein Isomorphismus.

Bew: Wegen  $f(xn) = f(x)$  für alle  $n \in \ker(f)$  ist  $h$  wohldefiniert.

Außerdem ist es auch surjektiv. Weiter ergibt sich

$$h((x\ker(f))(y\ker(f))) = h((xy)\ker(f)) = f(xy) = f(x)f(y) =$$

$h(x\ker(f))h(y\ker(f))$ , also ist  $h$  ein Homomorphismus. Schließlich folgt aus  $h(x\ker(f)) = f(x) = 1_H$ , daß  $x \in \ker(f)$  ist, also  $x\ker(f) = \ker(f)$ .

Daher ist  $h$  auch injektiv.  $\square$

---

11

13. November 2008

---

## Beispiel

$G = \mathbb{Z}, H = \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}, x \mapsto 5x+25\mathbb{Z}$ .

Dann  $\ker(f) = 5\mathbb{Z}$  und  $\text{im}(f) = \{5i+25\mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 4\}$ .

Bekommen Isomorphismus  $h : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rightarrow \{5i+25\mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 4\}$  durch  $x+5\mathbb{Z} \mapsto 5x+25\mathbb{Z}$ .

---

12

13. November 2008

---

## Direktes Produkt

Seien  $G$  und  $H$  Gruppen. Dann in  $G \times H$  koordinatenweise die Gruppengesetze definieren:  $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ .  
Einheitselement  $(1_G, 1_H)$ .

Damit wird  $G \times H$  zur Gruppe.

Einbettung  $G \rightarrow G \times H, x \mapsto (x, 1_H)$  von  $G$  ist Monomorphismus.  
Projektion  $G \times H \rightarrow G, (x, y) \mapsto x$  auf  $G$  ist Epimorphismus.

Kern der Projektion auf  $G$  ist Untergruppe  $\{1_G\} \times H$  von  $G \times H$ .

---

13

13. November 2008

---

## Erzeuger

Seien  $g_1, \dots, g_r \in G$ . Die von den  $g_i$  erzeugte Untergruppe  $U$  von  $G$  besteht aus allen Elementen von  $G$ , die durch Verknüpfung und Inversion aus den  $g_i$  erhalten werden können.  
Schreibweise  $U = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$ .

Äquivalent kann  $U$  als der Schnitt aller Untergruppen von  $G$  definiert werden, welche die  $g_i$  enthalten.

Ist die von den  $g_i$  erzeugte Untergruppe gleich  $G$ , so heißen die  $g_i$  ein Erzeugendensystem von  $G$ .

Gilt  $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$  mit  $r < \infty$ , so heißt  $G$  endlich erzeugt.

Gilt  $G = \langle g \rangle$ , so heißt  $G$  zyklisch.

Homomorphismen sind bereits durch ihre Bildwerte auf Erzeugern definiert.

---

14

13. November 2008

---

## Ordnungen

Sei  $G$  eine Gruppe und  $a \in G$ . Dann heißt  $\# \langle a \rangle$  die Ordnung von  $a$ .  
Es gilt  $\# \langle a \rangle = \min\{n \in \mathbb{Z}^{\geq 1} \mid a^n = e\}$  und  $\# \langle a \rangle \mid \#G$  nach Lagrange.

Thm (Fermat): Ist  $G$  endlich, so gilt  $a^{\#G} = e$  für  $a \in G$ .

Bew: Es gilt  $a^{\#G} = (a^{\# \langle a \rangle})^{\#G/\# \langle a \rangle} = e^{\#G/\# \langle a \rangle} = e$ .  $\square$

Thm: Ist  $\#G$  eine Primzahl, so ist  $G$  zyklisch.

Bew: Für  $a \in G \setminus \{e\}$  folgt  $\# \langle a \rangle > 1$  und  $\# \langle a \rangle \mid \#G$ , also  $\# \langle a \rangle = \#G$ .

Thm: Sind  $U, V$  Untergruppen von  $G$  mit teilerfremden Ordnungen, so gilt  $U \cap V = \{e\}$ .

Bew: Es gilt  $\#(U \cap V) \mid \#U$  und  $\#(U \cap V) \mid \#V$  nach Lagrange. Also  $\#(U \cap V) \mid \gcd\{\#U, \#V\} = 1$  und daher  $\#(U \cap V) = 1$ .  $\square$

---

15

13. November 2008

---

## Endlich erzeugte abelsche Gruppen

Sei  $G$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Thm (Version 1): Es gibt ein eindeutig bestimmtes  $n$  und eindeutig bestimmte  $c_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  mit  $c_i \mid c_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ , so daß gilt:

$$G \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/c_i\mathbb{Z}.$$

Thm (Version 2): Es gibt  $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ , Primzahlen  $p_i$  und Exponenten  $e_i \geq 1$ , so daß

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$$

gilt. Die Zahl  $r$  und die Paare  $(p_i, e_i)$  sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Die Äquivalenz von Version 1 und 2 beruht auf dem chinesischen Restsatz.

---

16

13. November 2008

---

## Beispiel

Ein direktes Produkt  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ .

Erzeuger:  $(1 + 3\mathbb{Z}, 0, 0), (0 + 3\mathbb{Z}, 1, 0), (0 + 3\mathbb{Z}, 0, 5)$ .

Ist nicht zyklisch.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  hat Erzeuger  $1 + 5\mathbb{Z}$ . Ist zyklisch.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ist auch zyklisch (!):

Erzeuger  $(1 + 2\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z})$ .

Als Gruppen sind  $\mathbb{Z}$  und  $5\mathbb{Z}$  unter  $x \mapsto 5x$  isomorph.

Gruppe wie in Thm (Version 1) ist genau dann zyklisch, wenn  $n = 1$  gilt.

Für einen endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  gilt  $\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ .

---

## Exponentiation in Gruppen

Wie  $g^n$  effizient ausrechnen? Z.B. für  $n = 27354268183173165356$ .

Schreibe  $n = \sum_{i=0}^k r_i 2^i$ ,  $r_i \in \{0, 1\}$ . Dann  $g^n = g^{(\dots(r_k 2^{r_{k-1}}) 2^{\dots}) 2^{r_0}}$ .

Eingabe:  $g$  und  $n \geq 0$ .

Ausgabe:  $g^n$ .

1. Wenn  $n = 0$  dann Ausgabe von 1.
2. Berechne rekursiv  $b \leftarrow g^{n \text{ div } 2}$ . Berechne  $b \leftarrow b^2$ .
3. Wenn  $n$  ungerade, dann  $b \leftarrow bg$ .
4. Ausgabe von  $b$ .

Aufwand  $\leq 2(\log_2(n) + 1)$  Operationen (Quadrieren und Multiplizieren).

Von diesem Verfahren gibt es einige Varianten (mit vorberechneter Tabelle, links-rechts, rechts-links, sliding windows, ...).