9.9 Erweiterungen von Dedekindringen

In diesem Abschnitt sind wir hauptsächlich an endlichen Ringerweiterungen S/R von Dedekindringen R und S interessiert. Endliche Erweiterungen sind natürlich auch ganze Erweiterungen.

Sei S/R eine Ringerweiterung der Ringe R und S. Seien I ein Ideal von R und J ein Ideal von S. Wir sagen, I liegt unter J und J liegt über I, wenn $I = R \cap J$ gilt. Wir schreiben hierfür auch $J|I$.

Seien nun R und S Dedekindringe und sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von S, welches über dem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von R liegt. Wir definieren den relativen Grad von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ als $f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = \dim_{R/\mathfrak{p}} S/\mathfrak{P} = [S/\mathfrak{P} : R/\mathfrak{p}]$. Für eine endliche Ringerweiterung S/R ist die Körpererweiterung $S/\mathfrak{P}$ über $R/\mathfrak{p}$ ebenfalls endlich und es gilt $f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) < \infty$.

Betrachte die Faktorisierung $\mathfrak{p}S = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i^{e_i}$ in paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{P}_i$ von S. Wegen $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P}$ gilt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$ für genau ein i. Wir definieren den Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ als $e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = e_i$. Es gilt dann stets $e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) < \infty$.

Die Körper $S/\mathfrak{P}$ und $R/\mathfrak{p}$ heißen Restklassenkörper von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{p}$ und werden mit $k(\mathfrak{P})$ und $k(\mathfrak{p})$ bezeichnet.

9.46 Lemma. *Sei R ein Integritätsring, $K = \mathrm{Quot}(R)$, L/K eine endliche Erweiterung und $S = \mathrm{Cl}(R, L)$. Dann gilt $L = KS$ und $L = \mathrm{Quot}(S)$.*

Beweis. Sei $x \in L$. Sei $f = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i t^i \in K[t]$ normiert mit $f(x) = 0$. Es gibt $d \in R$ mit $d\lambda_i \in R$ für alle i. Dann folgt $d^m f(x) = \sum_{i=0}^{m} d^{m-i}\lambda_i (dt)^i = 0$ und $g = \sum_{i=0}^{m} d^{m-i}\lambda_i t^i \in R[t]$. Also ist dx ganz über R und somit $dx \in S$.

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine K-Basis von L. Dann gibt es $d \in R$ mit $dx_1, \ldots, dx_n \in S$, und diese Element bilden auch eine K-Basis von L. Daraus folgt $L = KS = \mathrm{Quot}(S)$. □

9.47 Lemma. *Sei S/R eine Erweiterung der Integritätsringe R und S. Seien $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $L = \mathrm{Quot}(S)$.*

(i) *Ist S/R ganz, so gilt $L = KS$ und L/K ist algebraisch.*

(ii) *Ist L/K algebraisch und J ein Ideal von S mit $J \neq 0$, so ist $I = J \cap R$ ein Ideal von R mit $I \neq 0$.*

Beweis. Sei $b \in S$ mit $b \neq 0$. Sind S/R oder L/K ganz, so ist b ganz über K und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gibt es ein $f \in R[t]$ mit $f \neq 0$ und $f(b) = 0$. Sei $f \in R[t]$ mit $f \neq 0$, $f(b) = 0$ und $\deg(f)$ minimal. Schreibe $f(t) = g(t)t + c$ mit $g \in R[t]$, $g \neq 0$ und $c \in R$. Dann gilt $c \neq 0$, denn sonst folgte $g(b)b = 0$ und $g(b) = 0$ wegen der Regularität von b, im Widerspruch zur Wahl von f. Wir erhalten $c = -g(b)b$ und $b^{-1} = -g(b)/c$ in L.

(i): Die Inklusion $KS \subseteq L$ ist klar. Mit $b \in S$, $b \neq 0$ ist aber auch $b^{-1} \in KS$ nach der Vorbemerkung. Da KS ein Teilring von L und Erweiterungsring von S ist, folgt $KS = L$. Zu jedem $b \in L$ gibt es daher $d \in R$ mit $db \in S$. Also ist L auch algebraisch über K.

(ii): Sei $b \in J$ mit $b \neq 0$. Nach der Vorbemerkung gilt $c = -g(b)b \in R \cap J = I$ und $c \neq 0$. □

Die Aussage $L = KS$ in den beiden Lemmata zeigt, daß S eine K-Basis von L enthält.

Die nachfolgende Proposition zeigt, daß die oben eingeführten Begriffe unabhängig von Lokalisierungen sind.

9.48 Proposition. *Mit obiger Notation seien U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in U$ und $\mathfrak{P}$ ein Primideal von S und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $U \cap \mathfrak{p} = \emptyset$.*

(i) *Es gilt $v_{\mathfrak{P}}(I) = v_{\mathfrak{P}[U^{-1}]}(I[U^{-1}])$ für Ideale I von S und $k(\mathfrak{P}) = k(\mathfrak{P}[U^{-1}])$.*

(ii) *Es gilt $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}[U^{-1}] \mid \mathfrak{p}[U^{-1}]$ gilt.*

(iii) *Es gilt $e(\mathfrak{P}[U^{-1}]|\mathfrak{p}[U^{-1}]) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$ und $f(\mathfrak{P}[U^{-1}]|\mathfrak{p}[U^{-1}]) = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$.*

Beweis. Zunächst sind auch $R[U^{-1}]$ und $S[U^{-1}]$ Dedekindringe und $\mathfrak{P}[U^{-1}] = \mathfrak{P}S[U^{-1}]$ sowie $\mathfrak{p}[U^{-1}] = \mathfrak{p}R[U^{-1}]$ sind Primideale von S und R, wegen $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$ (sonst $= S$ beziehungsweise $= R$).

(i): Die Bewertungsaussage folgt aus der Multiplikativität von $I \mapsto I[U^{-1}]$, und weil Primideale auf Primideale oder R abgebildet werden. Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, daß Lokalisieren und Faktorisieren kommutieren.

(ii): Die Aussagen $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}[U^{-1}] \mid \mathfrak{p}[U^{-1}]$ sind äquivalent zu den Aussagen $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}S$ und $\mathfrak{P}[U^{-1}] \mid \mathfrak{p}S[U^{-1}]$, wobei sich diese Aussagen auf die Teilbarkeit in S und $S[U^{-1}]$ beziehen.

Gilt $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}S$, so folgt $\mathfrak{P}[U^{-1}]|\mathfrak{p}S[U^{-1}]$ aufgrund der Multiplikativität von $I \mapsto I[U^{-1}]$. Gilt $\mathfrak{P}[U^{-1}]|\mathfrak{p}S[U^{-1}]$, so folgt auch $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}S$, da $\mathfrak{P}$ ein Primideal ist und unter Verwendung der Bewertungsaussage von (i). □

9.49 Satz. *Sei S/R eine endliche Ringerweiterung der Integritätsringe R und S.*

(i) *Ist R ein Dedekindring und S ganz abgeschlossen, so ist S ebenfalls ein Dedekindring.*

(ii) *Seien R und S Dedekindringe. Unter jedem Primideal $\mathfrak{P}$ von S mit $\mathfrak{P} \neq 0$ liegt ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \neq 0$. Über jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \neq 0$ liegt ein Primideal $\mathfrak{P}$ von S mit $\mathfrak{P} \neq 0$.*

(iii) Seien R und S Dedekindringe und $n = [\mathrm{Quot}(S) : \mathrm{Quot}(R)]$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal $\neq 0$ von R so gilt

$$n = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}),$$

wobei die Summe über alle Primideale $\mathfrak{P}$ von S über $\mathfrak{p}$ läuft.

Beweis. (i): S ist nach Voraussetzung ganzabgeschlossen.

Mit R ist S als R-Modul noethersch, denn S ist ein endlich erzeugter R-Modul nach Voraussetzung. Dann ist auch jedes Ideal I von S als R-Untermodul von S noethersch, also endlich erzeugt. Also ist I auch als S-Modul endlich erzeugt und S daher auch als Ring noethersch.

Wir müssen nun nur noch $\dim(S) = 1$ zeigen. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von S mit $\mathfrak{P} \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ nach ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \neq 0$ nach dem Lemma. Da R ein Dedekindring ist, ist $\mathfrak{p}$ maximal. Dann ist der Integritätsring $S/\mathfrak{P}$ endlich über dem Körper $R/\mathfrak{p}$, also ein endlich dimensionaler Vektorraum über $R/\mathfrak{p}$. Nach Lemma 5.6 ist $S/\mathfrak{P}$ ein Körper, also $\mathfrak{P}$ maximal und daher $\dim(S) = 1$. Wir erhalten also, daß S ein Dedekindring ist.

(ii). Die erste Aussage folgt direkt aus dem Lemma. Für die zweite Aussage wollen wir zuerst $S\mathfrak{p} \neq S$ zeigen. Sei $U = R \backslash \mathfrak{p}$. Dann ist $R[U^{-1}]$ lokal und $S[U^{-1}]$ ein endlich erzeugter $R[U^{-1}]$-Modul. Wegen $S[U^{-1}] \neq 0$ gilt $S[U^{-1}]\mathfrak{p} \neq S[U^{-1}]$ nach dem Lemma von Nakayama. Also folgt auch $S\mathfrak{p} \neq S$. Faktorisiere nun $S\mathfrak{p} = \prod_i \mathfrak{P}_i^{e_i}$, was nach (ii) möglich ist. Dann gilt $S\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{p} \subseteq R \cap \mathfrak{P}_1$. Da $R \cap \mathfrak{P}_1$ ein Primideal ist und $\dim(R) = 1$, folgt $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{P}_1$. Also liegt $\mathfrak{P}_1$ über $\mathfrak{p}$.

(iii): Zum Beweis können wir Lokalisieren und $R = R_\mathfrak{p}$ annehmen. Dann ist R ein Hauptidealring und S besitzt eine R-Basis bestehend aus $n = [L : K]$ Elementen, denn Elemente von L sind genau dann R-linear unabhängig, wenn sie K-linear unabhängig sind, und $L = KS$ nach dem Lemma. Dann gilt einerseits $\dim_{R/\mathfrak{p}}(S/\mathfrak{p}S) = n$. Nach dem chinesischen Restsatz gilt andererseits

$$S/\mathfrak{p}S \cong \prod_{i=1}^{r} S/\mathfrak{P}_i^{e_i}.$$

Weiter ist $S/\mathfrak{P}_i^{e_i} \cong S_{\mathfrak{P}_i}/\mathfrak{P}_i^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i} = S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i}$ als $R/\mathfrak{p}$-Vektorräume für ein $\pi \in S_{\mathfrak{P}_i}$, denn $S_{\mathfrak{P}_i}$ ist ein diskreter Bewertungsring. Wir haben eine Kette von $S_{\mathfrak{P}_i}$-Untermoduln $S_{\mathfrak{P}_i} \supseteq \pi S_{\mathfrak{P}_i} \supseteq \cdots \supseteq \pi_i^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i}$ und daher auch eine Kette von $R/\mathfrak{p}$-Vektorräumen

$$S_{\mathfrak{P}_i}/\pi^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i} \supseteq \pi S_{\mathfrak{P}_i}/\pi^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i} \supseteq \cdots \supseteq \pi_i^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i^{e_i} S_{\mathfrak{P}_i} = 0.$$

Der Quotientenvektorraum zweier aufeinander folgender Kettenglieder beim Index j ist (nach dem zweiten Isomorphiesatz) isomorph zu $\pi_i^j S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i^{j+1} S_{\mathfrak{P}_i}$. Die

Abbildung $S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i S_{\mathfrak{P}_i} \to \pi_i^j S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i^{j+1} S_{\mathfrak{P}_i}$ liefert einen $R/\mathfrak{p}$-Vektorraum-Isomorphismus. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}\dim_{R/\mathfrak{p}}(S/\mathfrak{P}_i^{e_i}) &= \sum_{j=0}^{e_i-1} \dim_{R/\mathfrak{p}}(\pi_i^j S_{\mathfrak{P}_i}/\pi_i^{j+1} S_{\mathfrak{P}_i}) = e_i \dim_{R/\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{P}_i}/\pi S_{\mathfrak{P}_i}) \\ &= e(\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}n = \dim_{R/\mathfrak{p}}(S/\mathfrak{p}S) &= \sum_{i=1}^{r} \dim_{R/\mathfrak{p}}(S/\mathfrak{P}_i^{e_i}) = \sum_{i=1}^{r} \dim_{R/\mathfrak{p}}(S_{\mathfrak{P}_i}/\pi S_{\mathfrak{P}_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} e(\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}) f(\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}),\end{aligned}$$

was die Formel beweist. □

In der folgenden, häufig vorkommenden Situation treffen wir immer auf eine endliche Ringerweiterung S/R.

9.50 Satz. *Sei R ein noetherscher, ganz abgeschlossener Integritätsring, $K = \mathrm{Quot}(R)$, L/K eine endliche Körpererweiterung und $S = \mathrm{Cl}(R, L)$. Ist L/K separabel oder R als Algebra über einem Teilkörper k endlich erzeugt, so ist S endlich über R.*

Beweis. (i): Fall L/K separabel. Ist M ein R-Untermodul von L, so definieren wir

$$M^{\#} = \{x \in L \mid \mathrm{Tr}_{L/K}(xy) \in R \text{ für alle } y \in M\}.$$

Für $M \subseteq N$ folgt $M^{\#} \supseteq N^{\#}$. Außerdem gilt $S^{\#} \supseteq S$ (für diese Aussage stelle man sich die Spur in einem algebraischen Abschluß als Summe der über R ganzen Konjugierten vor, dann ist die Spur ein Element von K und ganz über R, liegt also auch in R, da R ganz abgeschlossen ist).

Nach dem Lemma gibt es eine in S gelegene K-Basis $b_1, \ldots, b_n$ von L. Sei M der von einer solchen Basis erzeugte R-Untermodul von S. Dann gilt $S \subseteq S^{\#} \subseteq M^{\#}$. Sei $\phi : M^{\#} \to R^n$ der durch $x \mapsto (\mathrm{Tr}_{L/K}(xb_1), \ldots, \mathrm{Tr}_{L/K}(xb_n))$ definierte R-Modulhomomorphismus. Da L/K separabel ist, ist ϕ nach Satz 6.32, (iii) injektiv. Folglich kann S als R-Untermodul von R^n aufgefaßt werden. Da R noethersch ist, sind R^n und S nach Satz 4.12 noethersch. Also ist S auch ein endlich erzeugter R-Modul.

(ii): Fall R als k-Algebra endlich erzeugt. Ist K' der separable Abschluß von K in L und $R' = \mathrm{Cl}(R, K')$, so ist R'/R nach (i) endlich. Dann ist R' als k-Algebra auch endlich erzeugt. Außerdem gilt $S = \mathrm{Cl}(R, L) = \mathrm{Cl}(R', L)$ wegen der

Transitivität der Ganzheit. Wir können also ohne Einschränkung $K' = K$ und $R' = R$ annehmen. Dann ist L/K rein inseparabel.

Wir beweisen die Aussage jetzt nur für den Fall, daß k vollkommen ist. Für den allgemeinen Fall (sogar ohne R ganz abgeschlossen) siehe Eisenbud, p. 297.

Sei $p^n = [L : K]$ und $R = k[x_1, \ldots, x_m]$. Es gilt $L^{p^n} \subseteq K$ und $S^{p^n} \subseteq K \cap S = R$, da R ganz abgeschlossen ist. Wir erhalten $R^{p^{-n}} \supseteq S \supseteq R$ und $R^{p^{-n}} = k^{p^{-n}}[x_1^{p^{-n}}, \ldots, x_m^{p^{-n}}] = k[x_1^{p^{-n}}, \ldots, x_m^{p^{-n}}]$, da k vollkommen ist. Folglich gilt $R^{p^{-n}} = R[x_1^{p^{-n}}, \ldots, x_m^{p^{-n}}]$, so daß $R^{p^{-n}}/R$ endlich ist. Da R noethersch ist, sind dann auch $R^{p^{-n}}$ und S als R-Moduln noethersch. Also ist S/R endlich. □

9.51 Korollar. *Ist R ein Hauptidealring, so ist S frei vom Rang n.*

Beweis. Nach dem Satz ist S ein endlich erzeugter R-Modul. Außerdem ist S torsionsfrei. Daher ist S nach dem Satz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen frei.

Wegen $L = KS$ und der Äquivalenz von K-linear unabhängig und R-linear unabhängig folgt, daß der Rang von S gleich n ist. □

Ein semilokaler Ring ist ein Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

9.52 Satz. *Sei R ein semilokaler Dedekindring. Dann ist R ein Hauptidealring.*

Beweis. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die Primideale $\neq 0$ von R. Sei I ein Ideal $\neq 0$ von R. Schreibe $I = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{e_i}$. Wähle $x_i \in \mathfrak{p}_i^{e_i} \backslash \mathfrak{p}_i^{e_i+1}$. Nach dem chinesischen Restsatz gibt es $x \in R$ mit $x \equiv x_i \bmod \mathfrak{p}_i^{e_i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = v_{\mathfrak{p}_i}(x_i) = e_i$, also $xR = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{e_i} = I$. □

Sei S/R eine endliche Erweiterung der Dedekindringe R und S und seien $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $L = \mathrm{Quot}(S)$. Für ein Ideal I von R definieren wir die Konorm (oder Erweiterung) von I als $\iota_{L/K}(I) = SI$. Wir setzen $\iota_{L/K}$ multiplikativ auf die gesamte Gruppe der gebrochenen Ideale von R fort. Dann ist $\iota_{L/K}$ ein Homomorphismus der Idealgruppen von R und S.

Für ein Primideal $\mathfrak{P}$ von S definieren wir $\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})}$ mit $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{P}$. Wir setzen $\mathrm{N}_{L/K}$ multipikativ auf die gesamte Gruppe der gebrochenen Ideale von S fort. Dann ist $\mathrm{N}_{L/K}$ per Definition ein Homomorphismus der Idealgruppen von S und R.

Mit der obigen Definition sehen wir, daß die Konorm und die Norm mit Lokalisierung bezüglich multiplikativ abgeschlossener Mengen $U \subseteq R$ mit $1 \in U$ vertauschen. Es gilt also $\iota_{L/K}(I)[U^{-1}] = \iota_{L/K}(I[U^{-1}])$ und $\mathrm{N}_{L/K}(J)[U^{-1}] = \mathrm{N}_{L/K}(J[U^{-1}])$.

9.53 Satz. *Sei S/R eine endliche Erweiterung der Dedekindringe R und S und seien $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $L = \mathrm{Quot}(S)$. Sei $n = [L : K]$.*

(*i*) *Sei* $x \in L^\times$. *Dann gilt* $\mathrm{N}_{L/K}(x)R = \mathrm{N}_{L/K}(xS)$.

(*ii*) *Es gilt* $\mathrm{N}_{L/K}(\iota_{L/K}(I)) = I^n$.

Beweis. (*i*): Der Index $\mathfrak{p}$ soll im folgenden Lokalisierung bezüglich $U = R\backslash\mathfrak{p}$ bedeuten. Die gebrochenen Ideale $\mathrm{N}_{L/K}(x)R$ und $\mathrm{N}_{L/K}(xS)$ sind R-Moduln, so daß zum Nachweis von $\mathrm{N}_{L/K}(x)R = \mathrm{N}_{L/K}(xS)$ der Nachweis von $\mathrm{N}_{L/K}(x)R_\mathfrak{p} = \mathrm{N}_{L/K}(xS)_\mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq 0$ von R genügt. Aufgrund der obigen Proposition und der Vorbemerkung vor dem Satz gilt $\mathrm{N}_{L/K}(xS)_\mathfrak{p} = \mathrm{N}_{L/K}(xS_\mathfrak{p})$. Da über $\mathfrak{p}$ nur endlich viele Primideale von S liegen, und alle anderen Primideale von S mit U dann nicht leeren Schnitt haben, besitzt $S_\mathfrak{p}$ nur diese endlich vielen Primideale $\mathfrak{P}_i$. Also ist $S_\mathfrak{p}$ semilokal und ein Hauptidealring. Wir schreiben $\mathfrak{P}_i = \pi_i S_\mathfrak{p}$ und $x = \varepsilon \prod_{i=1}^n \pi^{e_i}$ mit $\varepsilon \in S_\mathfrak{p}^\times$. Wegen der Multiplikativität genügt es nun, $\mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon) \in R^\times$ und $\mathrm{N}_{L/K}(\pi_i)R = \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{P}_i)$ zu zeigen.

Da $R_\mathfrak{p}$ ganzabgeschlossen ist, folgt $\mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon) \in R_\mathfrak{p}$ und $\mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon^{-1}) \in R_\mathfrak{p}$. Also $1 = \mathrm{N}_{L/K}(1) = \mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon\varepsilon^{-1}) = \mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon)\mathrm{N}_{L/K}(\varepsilon^{-1})$. Dies zeigt die erste Aussage.

Für die zweite Aussage sei $\mathfrak{P} = \pi S_\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_i$. Dann sind $S_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ frei vom Rang n sind, da $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring und Hauptidealring ist. Sei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine Basis von $S_\mathfrak{p}$ und M die Darstellungmatrix von π, so daß $x(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)M$ eine Basis von $\mathfrak{P}$ liefert. Es gilt $\mathrm{N}_{L/K}(\pi) = \det(M)$. Sei $z \in R$ mit $\mathfrak{p} = zR_\mathfrak{p}$. Nach dem Satz über die Smith Normalform angewendet auf M gibt es $\delta \in R_\mathfrak{p}^\times$ und $d_1, \ldots, d_n \geq 0$ mit $\det(M) = \delta \prod_{j=1}^n z^{d_j} = \delta z^{\sum_{j=1}^n d_j}$ und $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{P} \cong \prod_{j=1}^n R_\mathfrak{p}/z^{d_j}R_\mathfrak{p}$. Wegen $z(S_\mathfrak{p}/\mathfrak{P}) = 0$ folgt $d_j \in \{0,1\}$. Außerdem gilt $f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = \dim_{R_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p}/\mathfrak{P}) = \sum_{j=1}^n d_j$. Wir erhalten also $\mathrm{N}_{L/K}(\pi) = \det(M) = \delta z^{f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})}$ und daraus $\mathrm{N}_{L/K}(\pi)R_\mathfrak{p} = z^{f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})}R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})} = \mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{P})$, was zu zeigen war.

(*ii*): Es gilt $\iota_{L/K}(\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})}$ und damit

$$\mathrm{N}_{L/K}(\iota_{L/K}(\mathfrak{p})) = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}^{\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}^n.$$

Die Aussage folgt daraus mit Hilfe der Multiplikativität von $\iota_{L/K}$ und $\mathrm{N}_{L/K}$. $\square$

Sei R ein Dedekindring. Sei $I(R)$ die multiplikative Gruppe der gebrochenen Ideale (immer $\neq 0$) von R. Ein gebrochenes Ideal I von R heißt gebrochenes Hauptideal, wenn es $x \in K = \mathrm{Quot}(R)$ mit $x \neq 0$ und $I = Rx$ gibt. Die gebrochenen Hauptideale bilden die Untergruppe $P(R)$ von I_R. Die Idealklassengruppe oder Picardgruppe $\mathrm{Pic}(R)$ von R ist definiert als

$$\mathrm{Pic}(R) = I(R)/P(R).$$

Sei S/R eine endliche Erweiterung der Dedekindringe R und S und seien $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $L = \mathrm{Quot}(S)$. Aufgrund des Satzes liefern $\iota_{L/K}$ und $\mathrm{N}_{L/K}$ auch Homomorphismen $\iota_{L/K} : \mathrm{Pic}(R) \to \mathrm{Pic}(S)$ und $\mathrm{N}_{L/K} : \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$.

9.10 Funktionenkörper

Ein algebraischer Funktionenkörper F/k in einer Variablen ist eine transzendente Erweiterung vom Transzendenzgrad 1. Es gibt also $x \in F$ mit $F/k(x)$ endlich.

Ist $F/k(x)$ separabel, so heißt x separierendes Element. Ist k vollkommen, so gibt es nach Satz 7.11 stets ein separierendes Element von F/k.

Der algebraische Abschluß k_1 von k in F heißt exakter Konstantenkörper von F/k. Da F/k_1 ebenfalls transzendent vom Transzendenzgrad 1 ist, nehmen wir im folgenden zur Vereinfachung $k = k_1$ an.

Wie wir sehen werden, kommt den diskreten Bewertungsringen R in F mit $k^\times \subseteq R^\times$ und $\mathrm{Quot}(R) = F$ ein spezielles Interesse zu. Ist P das maximale Ideal von R, so nennen wir P eine Stelle von F/k und schreiben $R = R_P$. Die zugehörige exponentielle Bewertung auf F bezeichnen wir mit v_P. Weiter ist R/P ein Körper, den wir Restklassenkörper $k(P)$ von P nennen. Wegen $k^\times \subseteq R^\times$ ist der kanonische Homomorphismus $k \to R/P$ injektiv und wir fassen R/P als Erweiterungskörper von k auf. Der Grad von P is definiert als $\deg(P) = [R/P : k]$.

Die Divisorengruppe von F/k ist die von den Stellen von F/k erzeugte freie abelsche Gruppe. Es gilt also $D = \sum_P \lambda_P P$ mit $\lambda_P \in \mathbb{Z}$, wobei $\lambda_P = 0$ für fast alle P gilt. Wir schreiben $v_P(D) = \lambda_P$. Addiert wird koeffzientenweise. Zwei Divisoren D_1, D_2 sind genau dann gleich, wenn $v_P(D_1) = v_P(D_2)$ für alle P gilt. Wir definieren den Grad von D als $\deg(D) = \sum_P \lambda_P \deg(P)$.

Sei nun R ein Dedekindring und Teilring von F mit $k^\times \subseteq R^\times$ und $\mathrm{Quot}(R) = F$. Wir nennen R einen Holomorphiering von F/k. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R, so definiert $R_\mathfrak{p}$ einen diskreten Bewertungring mit $k^\times \subseteq R_\mathfrak{p}^\times$ und $\mathrm{Quot}(R_\mathfrak{p}) = F$, also ist $P = R_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ eine Stelle von F. Sei umgekehrt P eine Stelle von F/k mit $R \subseteq R_P$. Dann ist $\mathfrak{p} = R \cap P$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \neq 0$. Letzteres sieht man wie folgt: Sei $f/g \in P$ mit $f/g \neq 0$ und $f, g \in R$. Wegen $g \in R_P$ gilt auch $gf/g = f \in P$, also $f \in \mathfrak{p}$. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring mit $R_\mathfrak{p} \subseteq R_P$. Diskrete Bewertungsringe sind maximale Teilringe von F, die keine Körper sind (Übungsaufgabe). Daher folgt $R_\mathfrak{p} = R_P$. Die Primideale von R entsprechen also eindeutig den Stellen von F mit $R \subseteq R_P$. Wir wollen geeignete Holomorphieringe finden, so daß jede Stelle von F/k als Primideal eines dieser Holomorphieringe erhalten werden kann.

Als Beispiel betrachten wir $F = k(x)$, den rationalen Funktionenkörper über k. Sei P eine Stelle von $k(x)/k$. Dann gilt $v_P(x) \geq 0$ oder $v_P(1/x) = -v_P(x) \geq 0$, also $x \in R_P$ oder $1/x \in R_P$. Nehmen wir ohne Einschränkung $x \in R_P$ an. Dann folgt $k[x] \subseteq R_P$ und $\mathfrak{p} = P \cap k[x]$ erfüllt $R_\mathfrak{p} = R_P$. Wir erhalten somit jede Stelle von $k(x)$ als Primideal von $k[x]$ oder $k[1/x]$. Da $k[x]$ und $k[1/x]$ Hauptidealringe sind, korrespondieren Primideale zu irreduziblen Polynomen. Die Lokalisierungen $k[x][1/x]$ und $k[1/x][x]$ sind Dedekindringe und sind gleich. Daher liefern Primideale $\mathfrak{p}_1$ von $k[x]$ und $\mathfrak{p}_2$ von $k[1/x]$ mit $\mathfrak{p}_1 k[x,1/x] = \mathfrak{p}_2 k[x,1/x]$ die gleiche Stelle. Es bleiben nur das Primideal (x) von $k[x]$ und das Primideal $(1/x)$ von $k[1/x]$ übrig. Dies gibt einen Überblick über alle Stellen von $k(x)/k$. Wir bemerken, daß für $f, g \in k[x]$ die Bewertung $v_{(1/x)}(f/g) = \deg_x(g) - \deg_x(f)$ erfüllt. Daher spricht man in Abhängigkeit der Wahl des transzendenten Elements x von der Gradbewertung von $k(x)/k$.

Eine Erweiterung der Funktionenkörper F_2/k_2 und F_1/k_1 besteht aus einer Erweiterung F_2/F_1 der Körper F_1 und F_2 sowie einer Erweiterung k_2/k_1 der Konstantenkörper k_1 und k_2. Wir sprechen kurz von der Erweiterung der Funktionenkörper F_2/F_1, wenn die gemeinten Konstantenkörper k_1 und k_2 klar sind.

9.54 Satz. *Sei F_2/F_1 eine endliche Erweiterung der Funktionenkörper F_1/k_1 und F_2/k_2. Sei R ein Holomorphiering von F_1/k_1 und $S = \mathrm{Cl}(R, F_2)$. Ist F_2/F_1 separabel oder R als k_1-Algebra endlich, so ist auch S/R endlich und S ein Holomorphiering von F_2/k_2.*

Beweis. Nach den Sätzen aus dem vorhergehenden Abschnitt ist S/R endlich und S ein Dedekindring.

Nach den Lemma aus dem vorhergehenden Abschnitt gilt $\mathrm{Quot}(S) = F_2$.

Schließlich ist die Erweiterung k_2/k_1 algebraisch. Es gilt nämlich $\mathrm{trdeg}(F_2/k_1) = \mathrm{trdeg}(F_1/k_1) = 1$ und $\mathrm{trdeg}(F_2/k_2) = 1$. Also folgt $\mathrm{trdeg}(k_2/k_1) = 0$. Daher ist k_2/k_1 ganz und $k_2 \subseteq S$. Da k_2 ein Teilring von S ist, folgt $k_2^\times \subseteq S^\times$.

Insgesamt ist S also ein Holomorphiering von F_2/k_2. □

Sei F_2/F_1 eine endliche Erweiterung der Funktionenkörper F_1/k_1 und F_2/k_2. Ist P_1 eine Stelle von F_1/k_1 und P_2 eine Stelle von F_2/k_2 mit $P_1 \subseteq P_2$, so sagen wir, daß P_1 unter P_2 und P_2 über P_1 liegt und schreiben $P_2|P_1$. Ist P_2 eine Stelle von F_2, so ist $P_1 = F \cap P_2$ eine Stelle von F_1. Dies folgt durch die Betrachtung der Einschränkung von v_{P_2} auf F_1, da diese Einschränkung wieder eine Bewertung v von F_1 mit $v(k_1^\times) = \{0\}$ ist.

Wir haben oben gesehen: Ist R ein Holomorphiering von F/k und $\mathfrak{P}$ ein Primideal, so ist $P = R_\mathfrak{P}\mathfrak{P}$ eine Stelle von F/k. Außerdem liefern auf diese Weise keine zwei verschiedene $\mathfrak{P}$ die gleiche Stelle P. Unter dieser Identifikation können wir daher $\mathrm{Specm}(R)$ auch als Menge von Stellen von F/k auffassen. Damit gilt folgender Satz.

9.55 Satz. *Sei F/k ein Funktionenkörper. Dann gibt es zwei Holomorphieringe R_0 und R_∞ von F/k, so daß die Menge der Stellen durch*

$$\mathrm{Specm}(R_0) \cup \mathrm{Specm}(R_\infty)$$

unter obiger Identifikation gegeben ist.

Sei F_2/F_1 eine endliche Erweiterung der Funktionenkörper F_1/k_1 und F_2/k_2. Sei P_1 eine Stelle von F_1/k_1 und P_2 eine Stelle von F_2/k_2 mit $P_2|P_1$. Sei R ein Holomorphiering von F_1/k_1 mit $R \subseteq R_{P_1}$ und $\mathfrak{p} = R \cap P_1 \neq 0$. Sei $S = \mathrm{Cl}(R, F_2)$. Dann ist S ein Holomorphiering und es gilt $S \subseteq R_{P_2}$ und $\mathfrak{P} = S \cap P_2 \neq 0$.

Beweis. Sei $x \in F$ ein transzendentes Element. Dann ist $F/k(x)$ endlich. Setze $R_0 = \mathrm{Cl}(k[x], F)$ und $R_\infty = \mathrm{Cl}(k[1/x], F)$. Jede Stelle P_2 von F/k liegt über einer Stelle P_1 von $k(x)/k$. Diese gehört zu einem Primideal $\mathfrak{P}$ von $k[x]$ oder $k[1/x]$. Dann folgt $R_0 \subseteq R_P$ oder $R_\infty \subseteq R_P$. Da R_0 und R_∞ Holomorphieringe sind, entspricht P einem Primideal $\mathfrak{P}$ von R_0 oder R_∞.

Nach obigem Satz ist S ein Holomorphiering. Wegen $R \subseteq R_{P_1}$ gilt $\mathrm{Cl}(R, F_2) \subseteq \mathrm{Cl}(R_{P_1}, F_2) \subseteq R_{P_2}$. Letztere Inklusion gilt nach folgender Überlegung. Sei $x \in \mathrm{Cl}(R_{P_1}, F_2) \backslash R_{P_2}$. Dann gilt $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0 \in R_{P_2}$ mit geeigneten $\lambda_i \in R$ und $\lambda_n = 1$. Es folgt $v_{P_2}(\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i) = v_{P_2}(x^n) < 0$ nach der starken Dreiecksungleichung, also $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \notin R_{P_2}$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $v_{P_2}(x^n) \geq 0$ und damit $v_{P_2}(x) \geq 0$, also $x \in R_{P_2}$. □

Seien P_1 eine Stelle von F_1 und P_2 eine Stelle von F_2 mit $P_2|P_1$. Sei R ein Holomorphiering von F_1 mit $R \subseteq R_{\mathfrak{p}}$. Sei $S = \mathrm{Cl}(R, F_2)$. Dann gilt $S \subseteq R_{\mathfrak{P}}$. Seien $\mathfrak{p} \subseteq R$ und $\mathfrak{P} \subseteq S$ Primideale, die zu P_1 und P_2 gehören. Wir definieren den relativen Grad von P_2 über P_1 als den relativen Grad von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ und den Verzweigungsindex von P_2 über P_1 als den Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$. Es gilt $f(P_2|P_1) = [k_2(P_2) : k_1(P_1)]$, da Faktorisierung mit Lokalisierung kommutiert.

9.56 Satz. *Sei F_2/F_1 eine endliche Erweiterung der Funktionenkörper F_2/k_2 und F_1/k_1 vom Grad $n = [F_2 : F_1]$. Sei P_1 eine Stelle von F_1/k_1. Dann gilt*

$$n = \sum_{P_2|P_1} e(P_2|P_1) f(P_2|P_1).$$

Beweis. Folgt direkt aus obigem Satz. □

Für $F_1 = k(x)$ haben alle Stellen endlichen Grad, da die Restklassenkörper von der Form $k[x]/(\pi)$ mit einem Primpolynom $\pi \in k[x]$ sind. Nach denm Satz sind auch die Relativgrade endlich. Daher gilt auch $\deg(P_2) = f(P_2|P_1)\deg(P_1) < \infty$. Stellen haben also stets endlichen Grad.

Sei F/k ein Funktionenkörper und $x \in F$ ein transzendentes Element. Dann können wir definieren

$$(x) = \sum_P v_P(x) P.$$

Hierin sind fast alle $v_P(x)$ Null, denn sie entsprechen ja auch den Exponenten der Faktorisierungen von x in $\mathrm{Cl}(k[x], F)$ bzw. $\mathrm{Cl}(k[1/x], F)$. Wir setzen $(x)_0 =$

$\sum_{v_P(x)>0} v_P(x)P$ und $(x)_\infty = -((x) - (x_0))$. Seien P_x und $P_{1/x}$ die zu $k[x]x$ und $k[1/x](1/x)$ gehörigen Stellen von $k(x)/k$. Es gilt $\deg(P_x) = \deg(P_{1/x}) = 1$ sowie $e(P|P_x) = v_P(x)$ für Stellen P von F/k über P_x. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\deg((x)_0) &= \sum_{v_P(x)>0} v_P(x)\deg(P) \\
&= \sum_{v_P(x)>0} v_P(x) f(P|P_x)\deg(P_x) \\
&= \sum_{v_P(x)>0} v_P(x) f(P|P_x) \\
&= \sum_{v_P(x)>0} e(P|P_x) f(P|P_x) \\
&= [F : k(x)].
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\deg((x)_\infty) = [F : k(x)].$$

Wir haben den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

9.57 Satz. *Sei $x \in F$ transzendent über k. Dann gilt*

$$\deg((x)) = 0$$

und

$$\deg((x)_0) = \deg((x)_\infty) = [F : k(x)] \geq 1.$$

Es gilt $k = \cap_P R_P$, wobei der Schnitt über alle Stellen von F/k läuft.

Wir definieren den Grad von x als $\deg(x) = \deg((x)_0)$. Der erste Teil des Satzes sagt, daß ein transzendentes $x \in F$ mit Vielfachheiten gezählt genauso viele Polstellen wie Nullstellen besitzt, und daß x wegen $\deg(x) \geq 1$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

Beweis des zweiten Teil. Für $x \in k$ gilt $x \in \cap_P R_P$, wobei der Schnitt über alle Stellen P von F/k geht. Die folgt aus $k^\times \subseteq R_P^\times$ für alle P. Sei umgekehrt $x \in \cap_P R_P$. Da x keine Polstelle besitzt, kann x nicht transzendent über k sein. Also ist x algebraisch über k. Da k algebraisch abgeschlossen in F angenommen wurde, folgt $x \in k$. □