

9. Übung Codierungstheorie

1. Aufgabe Exponentenbewertung

(6 Punkte)

Sei $K := \mathbb{F}_q$ und F/K ein Funktionenkörper. Eine diskrete Bewertung von v von F ist eine surjektive Abbildung $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle $x, y \in F$
- (iii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in F$.

Zeige folgende Aussage: Gilt $v(x) \neq v(y)$ für $x, y \in F$, dann ist $v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$.

2. Aufgabe Divisoren

(5 Punkte)

Sei F/K ein algebraischer Funktionenkörper und $x \in F \setminus K$. Zeige folgende Aussagen:

- (i) Ist $f \in K[x]$, so gilt $(f)_\infty = \deg f \cdot (x)_\infty$,
- (ii) Sei $u = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in K[x]$. Zeige, dass $(u) = (f)_0 - (g)_0 + (\deg g - \deg f)(x)_\infty$ gilt.
- (iii) Ist F ein rationaler Funktionenkörper, so ist jeder Divisor vom Grad Null ein Hauptdivisor.

3. Aufgabe Bewertungen

(3 Punkte)

Sei $K := \mathbb{F}_q$, $F = K(x)$ rationaler Funktionenkörper mit Konstantenkörper K und $y = \frac{1}{x}$. Sei $g(y) \in K[y]$ ein normiertes irreduzibles Polynom und v_g die zu g assoziierte Bewertung. Welche Bewertung in der Menge $\{v_f, v_\infty \mid f \in K[x]\}$ korrespondiert zu v_g ?

4. Aufgabe Stellen

(2 Punkte)

Sei $K := \mathbb{F}_3$ und $F := K(x, y)$ Funktionenkörper mit $x/\mathbb{F}_3$ transzendent und $y^2 = x^3 + x + 1$. Bestimme alle Stellen vom Grad 1 in F .

Hinweis: Betrachte die beiden Dedekindringe $\mathcal{O}_F := \langle 1, y \rangle$ und $\mathcal{O}_{F,\infty} := \langle \frac{1}{x}, \frac{y}{x^2} \rangle$, welche jeweils als $K[x]$ - bzw. $K[1/x]$ -Modul aufzufassen sind. Dass diese Ringe Dedekindringe sind, darf ohne Beweis benutzt werden. Für ein Primideal $P \subseteq \mathcal{O}_F$ betrachte die Restklassenabbildung

$$\pi_P : \mathcal{O}_F \longrightarrow K'/K$$

mit K'/K endlich. Wenn P vom Grad 1 ist, dann ist $[K' : K] = 1$. Sei $f(x, y) := y^2 - (x^3 + x + 1)$ und $y^* := \pi_P(y)$ und $x^* := \pi_P(x)$. Zeige, dass die Lösungspaare $x^*, y^* \in K$ mit $f(x^*, y^*) = 0$ genau den Primidealen vom Grad 1 in $\mathcal{O}_F$ entsprechen. Betrachte analog dazu $\mathcal{O}_{F,\infty}$, wobei hier statt f das Minimalpolynom g von $w := y/x^2$ über $z := 1/x$ betrachtet werden muss mit $w^2 - (z^4 + z^3 + z) = 0$.