Technische Universität Berlin Sommersemester 08
Prof. Dr. F. Hess, M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/˜hess/codth-ss2008

8. Übung Codierungstheorie

1. Aufgabe **Separabler Abschluss** (4 Punkte)

(a) Sei $k = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $K = k(t)$ eine einfach transzendente Erweiterung von k. Berechne den separablen Abschluss F von K in folgenden Körpern E. Wie sieht jeweils $[E : K]_s$ aus?

(i) $E = K(\alpha)$ mit α ist Nullstelle von $f(x) = x^{50} + tx^{15} + t \in K[x]$.

(ii) $E = K(\alpha)$ mit α ist Nullstelle von $f(x) = x^{24} + tx^5 + t \in K[x]$.

(b) Sei K wie in (a) und E ein Erweiterungskörper von K mit $[E : K] = n$. Zeige, dass wenn $\mathrm{Char} K$ den Grad n von E über K nicht teilt dann $[E : K]_s = [E : K]$ ist.

2. Aufgabe **Separabilität** (4 Punkte)

Zeige oder widerlege folgende Aussage: Sei E/K separabel und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Für jedes a in E gelte $[K(a) : K] \leq n$. Dann ist $[E : K] \leq n$.

3. Aufgabe **Transzendenzgrad** (4 Punkte)

Sei E/K eine Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper. Zeige folgende Aussagen: Für Transzendenzbasen B von F/K und B' von E/F gilt $B \cap B' = \emptyset$ und $B \cup B'$ ist eine Transzendenzbasis von E/K. Ferner gilt $\mathrm{trdeg}(E/K) = \mathrm{trdeg}(E/F) + \mathrm{trdeg}(F/K)$.

4. Aufgabe **Reguläre Körpererweiterungen** (4 Punkte)

Sei K/k eine Körpererweiterung und k algebraisch abgeschlossen in K. Sei x ein Element aus dem algbraischen Abschluss k^a von k. Zeige, dass dann $k(x)$ und K linear disjunkt über k sind und $[k(x) : k] = [K(x) : K]$ gilt.