Technische Universität Berlin Sommersemester 08
Prof. Dr. F. Hess, M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/codth-ss2008

7. Übung Codierungstheorie

1. Aufgabe **Idempotente** **(5 Punkte)**

Sei $R_n := \mathbb{F}_q[X]/(X^n - 1)$ und C_1 und C_2 Ideale in R_n mit Idempotenten e_1 und e_2. Zeige folgende Aussagen:

(i) Ist $C_1 \cap C_2 \neq 0$, so besitzt $C_1 \cap C_2$ die Idempotente $e_1 e_2$.

(ii) Ist $q = 2^m$, so besitzt $C_1 + C_2$ die Idempotente $e_1 + e_2 + e_1 e_2$.

2. Aufgabe **Spur-Codes** **(5 Punkte)**

Sei C ein Code der Länge n über $E := \mathbb{F}_{q^m}$ und $K := \mathbb{F}_q$. Zeige, dass $(C|_K)^\perp = \mathrm{Tr}_{E/K}(C^\perp)$ ist.

3. Aufgabe **Primitive Idempotente** **(6 Punkte)**

Sei $R_n = \mathbb{F}_q[X]/(X^n - 1)$ mit $(q, n) = 1$ und $X^n - 1 = f_1(X) \cdots f_r(X)$ die Faktorisierung von $X^n - 1$ in irreduzible Polynome. Zeige folgende Aussagen:

(a) Die $M_i := R_n f_i$ sind maximale Ideale in R_n,

(b) Die $\tilde{M}_i := R_n \prod_{j=1, j\neq i}^n f_i = R_n \tilde{f}_i$ sind minimale Ideale in R_n,

(c) $\tilde{M}_i$ ist orthogonal zu M_i,

(d) $\tilde{M}_i$ ist isomorph zu einem Körper.