Technische Universität Berlin Wintersemester 07/08
Prof. Dr. F. Heß
M. Wagner
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2`

9. Übung Algebra II

1. Aufgabe Semidirektes Produkt von Galoisgruppen (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und $f(t) = t^n - a \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel. Ferner sei $K/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper von f. Zeige, dass es dann einen Isomorphismus

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \longrightarrow \mathbb{Z}_n^\times \ltimes_\phi \mathbb{Z}_n$$

mit $\phi : \mathbb{Z}_n^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n), \quad x \mapsto \theta_x : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad y \mapsto xy$. Hierbei ist $\mathbb{Z}_n^\times \ltimes_\phi \mathbb{Z}_n$ das äussere semidirekte Produkt von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_n$ und der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_n^\times$ bezüglich ϕ.

2. Aufgabe Abelsche Erweiterungen (4 Punkte)

Zeige, dass eine normale Erweiterung K über $\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 3$ existiert und gib ein Beispiel an für solch einen Körper.

3. Aufgabe Galoisgruppe eines Polynomes (3 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel mit abelscher Galois-Gruppe $G(f,\mathbb{Q})$. Dann gilt $\deg f = |G(f,\mathbb{Q})|$.

4. Aufgabe Galoisgruppe eines Polynomes (6 Punkte)

Sei $f(t) = t^4 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$. Bestimme zu sämtlichen Untergruppen H von $G(f,\mathbb{Q})$ ihre Fixkörper im Zerfällungskörper $E/\mathbb{Q}$ von f.

Hinweis: Es gilt $G(f,\mathbb{Q}) \cong D_4$. Die D_4 besitzt 5 Untergruppen der Ordnung 2 und 3 Untergruppen der Ordnung 4. Weiterhin ist

$$D_4 = \{\sigma^i\tau^j \mid 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 1\}$$

mit $\tau\sigma = \sigma^3\tau$, wobei σ die Ordnung 4 und τ die Ordnung 2 hat. Die nicht-trivialen Untergruppen sind von der Gestalt

$$U_1 = \{id, \sigma^2\}, \quad U_2 = \{id, \tau\}, \quad U_3 = \{id, \sigma\tau\}, \quad U_4 = \{id, \sigma^2\tau\}$$

$$U_5 = \{id, \sigma^3\tau\}, \quad U_6 = \langle\sigma\rangle, \quad U_7 = \{id, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\} \quad \text{und } U_8 = \{id, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}.$$