

## 7. Übung Algebra II

### 1. Aufgabe Fixkörper und Galoiserweiterungen

(5 Punkte)

(a) Sei  $E/K$  eine algebraische Erweiterung. Zeige, dass

(i)  $\mathcal{F}_{E/K} \circ \mathcal{G}_{E/K} \circ \mathcal{F}_{E/K} = \mathcal{F}_{E/K}$  und

(ii)  $\mathcal{G}_{E/K} \circ \mathcal{F}_{E/K} \circ \mathcal{G}_{E/K} = \mathcal{G}_{E/K}$

gilt.

(b) Es sei  $E/K$  eine endliche Galois-erweiterung mit Galois-Gruppe  $G$  und  $E = K(\alpha)$ . Ferner sei  $H \leq G$  und

$$f(t) = \prod_{\sigma \in H} (t - \sigma(\alpha)) = \sum_{i=0}^r \beta_i t^i.$$

Zeige, dass  $\mathcal{F}_{E/K}(H) = K(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r)$  ist.

### 2. Aufgabe Separable und inseparable Körpererweiterungen

(5 Punkte)

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(i) Sei  $E/K$  normal und  $G = \text{Aut}_K(E)$ . Dann ist  $E^G/K$  der rein inseparable Abschluss von  $K$  in  $E$  und  $[E^G : K] = [E : K]_i$ .

(ii) Sei  $E/K$  algebraisch und  $F_1, F_2$  Zwischenkörper von  $E/K$  mit  $F_1/K$  normal und  $F_2/K$  separabel. Es gelte  $F_1 \cap F_2 = K$ . Dann sind  $F_1$  und  $F_2$  linear disjunkt über  $K$ .

### 3. Aufgabe Separabilität

(4 Punkte)

Zeige oder widerlege folgende Aussage: Sei  $E/K$  separabel und  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ . Für jedes  $a$  in  $E$  gelte  $[K(a) : K] \leq n$ . Dann ist  $[E : K] \leq n$ .

### 4. Aufgabe Galois-Gruppen

(2 Punkte)

Sei  $t$  transzendent über  $\mathbb{F}_2$  und  $f(T) = T^2 + t \in \mathbb{F}_2(t)[T]$ . Zeige, dass  $f$  irreduzibel ist. Bestimme den Zerfällungskörper  $L$  von  $f$  über  $\mathbb{F}_2(t)$  und  $G(L/\mathbb{F}_2(t))$ . Ist  $L/\mathbb{F}_2(t)$  galoissch?