Technische Universität Berlin Wintersemester 07/08
Prof. Dr. F. Heß
M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2

6. Übung Algebra II

1. Aufgabe Kreisteilungskörper (5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ und μ_n und μ_m die Menge der n-ten Einheitswurzeln bzw. m-ten Einheitswurzeln aus $\mathbb{C}$. Ferner seien $\mathbb{F}_{p^n}$ und $\mathbb{F}_{p^m}$ endliche Körper der Charakteristik $p > 0$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(i) $\mathbb{F}_{p^n}\mathbb{F}_{p^m} = \mathbb{F}_{p^{\mathrm{kgV}(n,m)}}$ und $\mathbb{F}_{p^n} \cap \mathbb{F}_{p^m} = \mathbb{F}_{p^{\mathrm{ggT}(n,m)}}$

(ii) $\mathbb{Q}(\mu_n)\mathbb{Q}(\mu_m) = \mathbb{Q}(\mu_{\mathrm{kgV}(n,m)})$ und $\mathbb{Q}(\mu_{\mathrm{ggT}(n,m)}) = \mathbb{Q}(\mu_n) \cap \mathbb{Q}(\mu_m)$

2. Aufgabe Transitivität von Norm und Spur (3 Punkte)

Sei E/K eine endliche Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper von E/K. Ferner sei $a \in E$. Zeige, dass

(a) $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = \mathrm{Tr}_{F/K}\left(\mathrm{Tr}_{E/F}(a)\right)$ und

(b) $\mathrm{N}_{E/K}(a) = \mathrm{N}_{F/K}\left(\mathrm{N}_{E/F}(a)\right)$

gilt unter Verwendung von Lemma 1.52 im Skript: Sei F Zwischenkörper der algebraischen Erweiterung E/K und sei C ein algebraischer Abschluss von E. Dann gibt es eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K(F, C) \times \mathrm{Hom}_F(E, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E, C).$$

3. Aufgabe Kreisteilungspolynome (3 Punkte)

Zerlege die folgenden Polynome

(i) $\Phi_5(t)$ und $\Phi_{12}(t)$ über $\mathbb{F}_{11}$

(ii) $\Phi_4(t)$ über $\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{13}$ und $\mathbb{F}_{17}$.

in irreduzible Faktoren über den jeweiligen Primkörpern.

4. Aufgabe **Kreisteilungspolynome** **(5 Punkte)**

Zeige folgende Aussagen:

(i) Für jede ungerade Zahl $n > 1$ gilt $\Phi_{2n}(t) = \Phi_n(-t)$.

(ii) Ist p Primzahl und $m \in \mathbb{N}^{>0}$ mit $p|m$, so gilt $\Phi_{pm}(t) = \Phi_m(t^p)$

(iii) Ist p Primzahl, so gilt

$$\Phi_{p^k}(t) = t^{(p-1)p^{k-1}} + t^{(p-2)p^{k-1}} + \ldots + t^{p^{k-1}} + 1.$$

(iv) Für jede Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$ gilt

$$\Phi_{pn}(t) = \frac{\Phi_n(t^p)}{\Phi_n(t)}.$$

(v) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt

$$\Phi_n(t^{-1}) = \Phi_n(t)t^{-\phi(n)}$$

wobei ϕ die Eulersche Phi-Funktion ist.