Technische Universität Berlin
Prof. Dr. F. Heß
M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2

Wintersemester 07/08

5. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Primitive Elemente** **(4 Punkte)**

(i) Zeige, dass der Zerfällungskörper von $f(t) = t^3 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ ein primitives Element besitzt und bestimme dieses.

(ii) Sei L/K eine Körpererweiterung mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Ferner seien $x, y \in L$ mit $x^p, y^p \in K$ und $[K(x, y) : K] = p^2$. Zeige, dass $K(x, y)$ kein primitives Element besitzt.

2. Aufgabe **Artin-Schreier Erweiterungen** **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $a \in K$ und $f(t) = t^p - t - a \in K[t]$. Zeige, dass f separabel ist. Zeige ferner, dass f genau dann irreduzibel über K ist, wenn f in K keine Nullstellen besitzt.

3. Aufgabe **Inseparabilität und Automorphismen** **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K rein inseparabele Erweiterung von K. Zeige, dass L/K normal ist und die Automorphismengruppe von L/K trivial ist, d.h. dass $\mathrm{Aut}(L/K) = \{id\}$ gilt.

4. Aufgabe **Endliche Körper** **(4 Punkte)**

Sei $K := \mathbb{Q}(i)$ mit $i^2 = -1$ und $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$ ein Teilring von K. Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist mittels

$$\phi : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}, \quad a + bi \longmapsto a^2 + b^2.$$

Ferner sei $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ ein Primelement. Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ ein endicher Körper ist mit $\phi(\alpha)$ Elementen.

Hinweis: Mache eine Fallunterscheidung $\phi(\alpha) = 2, \phi(\alpha) = p$ mit $p > 2$ Primzahl und $\phi(\alpha)$ keine Primzahl. Siehe auch Algebra I, 9. Übungsblatt, 3. Aufgabe.