Technische Universität Berlin Wintersemester 07/08
Prof. Dr. F. Heß
M. Wagner
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2`

3. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Normale Erweiterungen** (5 Punkte)

Betrachte die Erweiterungen

(i) $E_1/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$,

(ii) $E_2/E_1 = E_1((1+i)\sqrt[4]{5})$ und

(iii) $E_3/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{5})$.

a) Welche der Körpererweiterungen sind normal?

b) Sei E/K eine Körpererweiterung und L ein Zwischenkörper. Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Wenn sowohl E/L als auch L/K normal sind, dann ist auch E/K normal.

2. Aufgabe **Zerfällungskörper** (3 Punkte)

Bestimme den Grad $[E : \mathbb{Q}]$ der Zerfällungkörper folgender Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^6 + 1, \quad x^5 - 1 \text{ und } x^4 + 1.$$

3. Aufgabe **Endomorphismen von Körpererweiterungen** (4 Punkte)

Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Der Satz 1.41 im Skript sagt aus, dass

$$\mathrm{End}_K(E) = \mathrm{Aut}_K(E)$$

ist. Gib ein Gegenbeispiel für die Aussage an, wenn man nur die Vorraussetzung E ist Körpererweiterung von K macht.

4. Aufgabe **Primkörper** **(4 Punkte)**

(a) Seien K_1 und K_2 Körper, welche den selben Primkörper K enthalten und

$$\sigma : K_1 \longrightarrow K_2$$

ein Homomorphismus. Zeige, dass K im Fixkörper von σ enthalten ist.

(b) Zeige, dass ein beliebiger Primkörper entweder isomorph zu einem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Primzahl oder zu $\mathbb{Q}$ ist.