

14. Übung Algebra II

1. Aufgabe Exakte Sequenzen

(5 Punkte)

Zeige folgende Aussage: Sei

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad (1)$$

eine exakte Sequenz von R -Moduln mit $f : U \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow N$. Dann sind äquivalent:

(a) (1) zerfällt rechts

(b) (1) zerfällt links

(c) $\exists \phi : M \longrightarrow U \oplus N$ mit ϕ Isomorphismus, $\phi \circ f : U \longrightarrow U \oplus N : u \longmapsto u \oplus 0$ und $g \circ \phi^{-1} : U \oplus N \longrightarrow N, u \oplus n \longmapsto n$.

Dabei zerfällt die Sequenz (1) rechts, wenn ein R -Modulhomomorphismus $j : N \longrightarrow M$ existiert mit $g \circ j = id_N$. Die Sequenz (1) zerfällt links, wenn ein R -Modulhomomorphismus $i : M \longrightarrow U$ existiert mit $i \circ f = id_U$.

2. Aufgabe Cayley-Hamilton

(6 Punkte)

Sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Zeige, dass wenn $\alpha : M \longrightarrow M$ ein Epimorphismus von M ist, dann ist α ein Isomorphismus. Gehe dazu folgendermassen vor:

(a) Mache zuerst M zu ein $R[t]$ Modul. Dabei ist $tm := \alpha(m)$ zu setzen. Betrachte das Ideal $I = Rt$.(b) Wende den Satz von Cayley-Hamilton auf den $R[t]$ -Modul M mit $\phi = id$ an. Es gibt dann ein $f = \lambda_{n-i}x^i \in R[t][x]$ mit $t^i | \lambda_i$ für i geeignet.(c) Betrachte für $f \in R[t][x]$ die Ausdrücke $f(id)(m)$ und $f(1)(m)$. Was fällt auf?

3. Aufgabe Moduln

(5 Punkte)

Zeige: Ist M frei vom Rang n , so ist jedes Erzeugendensystem von M bestehend aus n Elementen eine Basis von M .