Technische Universität Berlin Wintersemester 07/08
Prof. Dr. F. Heß
M. Wagner
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2`

13. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Funktoren** (5 Punkte)

Zeige folgende Aussage: Ist der additive Funktor in der Modulkategorie auf kurzen exakten Sequenzen exakt, so ist er links und rechtsexakt.

2. Aufgabe **Lokaliserung von Moduln** (4 Punkte)

Sei M ein R-Modul und $U \subseteq R$ eine nicht-leere,multiplikativ abeschlossene Teilmenge von R. Zeige, dass die Abbildung

$$h : M \longrightarrow M\left[U^{-1}\right],\ m \longmapsto \frac{m}{1}$$

genau dann ein Isomorphismus ist, wenn die Elemente von $u \in U$ mittels

$$M \longrightarrow M,\ m \longmapsto um$$

auf M als Automorphismen operieren.

3. Aufgabe **Lokalisierung von Moduln** (3 Punkte)

Seien M und N jeweils R-Moduln und $U \subseteq R$ eine nicht-leere,multiplikativ abeschlossene Teilmenge vonm R. Ferner $N' \subseteq M[U^{-1}]$ ein $R\left[U^{-1}\right]$-Untermodul, und sei $N \subseteq M$ das Urbild von N' bezgüglich

$$h : M \longrightarrow M\left[U^{-1}\right],\ m \longmapsto \frac{m}{1}$$

Zeige, dass $N' = N\left[U^{-1}\right]$ gilt.

4. Aufgabe **Universelle Eigenschaft** (4 Punkte)

Seien M und N jeweils R-Moduln und $U \subseteq R$ eine nicht-leere multiplikativ abeschlossene Teilmenge. Zeige die universelle Eigenschaft für lokale Moduln: Zu $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ mit einem R-Modul N, auf dem U mittels Multiplikation als Automorphismus operiert (siehe Aufgabe 2), gibt es ein eindeutiges $\phi \in \mathrm{Hom}(M\left[U^{-1}\right], N)$.