

## 12. Übung Algebra II

### 1. Aufgabe Reguläre Körpererweiterungen (4 Punkte)

Sei  $K/k$  eine Körpererweiterung und  $k$  algebraisch abgeschlossen in  $K$ . Sei  $x$  ein Element aus dem algebraischen Abschluss  $k^a$  von  $k$ . Zeige, dass dann  $k(x)$  und  $K$  linear disjunkt über  $k$  sind und  $[k(x) : k] = [K(x) : K]$  gilt.

### 2. Aufgabe Algebraische Disjunktheit (4 Punkte)

Formuliere und beweise Satz 1.22 im Skript für die algebraische Disjunktheit.

### 3. Aufgabe Automorphismen (4 Punkte)

Sei  $L = K(x)$  eine einfach transzendente Erweiterung von  $K$ ,  $u = \frac{g(x)}{h(x)} \in L \setminus K$  mit  $g, h \in K[x]$  und  $\text{ggT}(g, h) = 1$ . Zeige folgende Aussagen:

(a)  $K(x) = K(u) \Leftrightarrow u = \frac{ax+b}{cx+d}$  mit  $a, b, c, d \in K$ ,  $ad - bc \neq 0$ .

(b) Für jeden Automorphismus  $\sigma : K(x) \rightarrow K(x)$  mit  $\sigma(k) = k$  für alle  $k \in K$  gilt

$$\sigma(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

wobei  $a, b, c, d \in K$  ist mit  $ad - bc \neq 0$ .

### 4. Aufgabe Algebraische Disjunktheit (4 Punkte)

Gib ein Beispiel für eine algebraisch disjunkte Erweiterung, welche nicht linear disjunkt ist.