1. Übung Algebra II

1. Aufgabe Mehrfache Nullstellen

(4 Punkte)

(i) Es sei der Polynomring $\mathbb{C}[x]$ vorgegeben. Welches der folgenden Polynome hat mehrfache Nullstellen? Bestimme gegebenenfalls die mehrfachen Nullstellen.

(i) $x^5 + 6x^3 + 3x + 4$

(ii) $x^5 + 5x + 5$

(ii) Es seien nun $f, g, \in \mathbb{Q}[x]$ mit

(i) $f(x) = x^4 + 1$

(ii) $g(x) = x^4 - 1$.

Faktorisierere f und g über $\mathbb{Q}[x]$.

2. Aufgabe Basen von algebraischen Körpererweiterungen

(4 Punkte)

Sei die algebraische Körpererweiterung $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gegeben.

(i) Bestimme eine $\mathbb{Q}$ -Basis für $E/\mathbb{Q}$.

(ii) Bestimme ein primitives Element von $E/\mathbb{Q}$.

(iii) Es sei $\alpha := \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1} \in E$. Stelle α als $\mathbb{Q}$ -Linearkombination der in (i) angegebenen Basis dar.

3. Aufgabe Erzeugendensysteme

(4 Punkte)

Es sei E/K eine endliche algebraische Körpererweiterung von K und $A \subseteq E$. Zeige, dass $K(A) = K[A]$ gilt.

4. Aufgabe Gradsatz für endliche Körpererweiterungen

(4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben. Es sei $\mathbb{Q}(a)$ eine einfache algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ von ungeradem Grad. Zeige, dass $\mathbb{Q}(a^2) = \mathbb{Q}(a)$ gilt.