Technische Universität Berlin Wintersemester 05/06
Prof. Dr. F. Hess
M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2

8. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Einfache Artin-Schreier-Erweiterungen** **(3 Punkte)**

Sei K ein Körper, $\mathrm{Char}(K) = p > 0$ und $f(t) = t^p - t - a \in K[t]$ irreduzibel. Zeige folgende Aussagen:

(a) Der Zerfällungskörper E von f ist galoissch über K und es gilt $E = K(b)$ mit $f(b) = 0$.

(b) Durch
$$\phi : G(E/K) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ mit } \sigma(b) = b + \phi(\sigma)$$
wird ein Isomorphismus definiert. Die Erweiterung E/K ist zyklisch von der Ordnung p.

2. Aufgabe **Semidirektes Produkt von Galoisgruppen** **(3 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und $f(t) = t^n - a \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel. Ferner sei $K/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper von f. Zeige, dass es dann einen Isomorphismus
$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \longrightarrow \mathbb{Z}_n^\times \ltimes_\phi \mathbb{Z}_n$$
mit $\phi : \mathbb{Z}_n^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n), \quad x \mapsto \theta_x : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad y \mapsto xy$. Hierbei ist $\mathbb{Z}_n^\times \ltimes_\phi \mathbb{Z}_n$ das äussere semidirekte Produkt von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_n$ und der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_n^\times$ bezüglich ϕ.

Hinweis: Zum semidirekten Produkt siehe 5. Aufgabenblatt Algebra I.

3. Aufgabe **Abelsche Erweiterungen** **(4 Punkte)**

Zeige, dass eine normale Erweiterung K über $\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 3$ existiert und gib ein Beispiel an für solch einen Körper.

4. Aufgabe **Galoisgruppe eines Polynomes** **(6 Punkte)**

Sei $f(t) = t^4 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$. Bestimme zu sämtlichen Untergruppen H von $G(f, \mathbb{Q})$ ihre Fixkörper im Zerfällungskörper $E/\mathbb{Q}$ von f.

Hinweis: Es gilt $G(f, \mathbb{Q}) \cong D_4$. Die D_4 besitzt 5 Untergruppen der Ordnung 2 und 3 Untergruppen der Ordnung 4. Weiterhin ist

$$D_4 = \{\sigma^i \tau^j \mid 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 1\}$$

mit $\tau\sigma = \sigma^3\tau$, wobei σ die Ordnung 4 und τ die Ordnung 2 hat. Die nicht-trivialen Untergruppen sind von der Gestalt

$$U_1 = \{id, \sigma^2\}, \quad U_2 = \{id, \tau\}, \quad U_3 = \{id, \sigma\tau\}, \quad U_4 = \{id, \sigma^2\tau\}$$

$$U_5 = \{id, \sigma^3\tau\}, \quad U_6 = \langle\sigma\rangle, \quad U_7 = \{id, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\} \quad \text{und } U_8 = \{id, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}.$$