8. Übung Algebra II

1. Aufgabe Einfache Artin-Schreier-Erweiterungen

(3 Punkte)

Sei K ein Körper, $\text{Char}(K) = p > 0$ und $f(t) = t^p - t - a \in K[t]$ irreduzibel. Zeige folgende Aussagen:

(a) Der Zerfällungskörper E von f ist galoissch über K und es gilt $E = K(b)$ mit $f(b) = 0$.

(b) Durch

$$\phi : G(E/K) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ mit } \sigma(b) = b + \phi(\sigma)$$

wird ein Isomorphismus definiert. Die Erweiterung E/K ist zyklisch von der Ordnung p .

2. Aufgabe Semidirektes Produkt von Galoisgruppen

(3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $f(t) = t^n - a \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel. Ferner sei $K/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper von f . Zeige, dass es dann einen Isomorphismus

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \longrightarrow \mathbb{Z}_n^{\times} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_n$$

mit $\phi : \mathbb{Z}_n^{\times} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$, $x \mapsto \theta_x : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $y \mapsto xy$. Hierbei ist $\mathbb{Z}_n^{\times} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_n$ das äussere semidirekte Produkt von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_n$ und der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_n^{\times}$ bezüglich ϕ .

Hinweis: Zum semidirekten Produkt siehe 5. Aufgabenblatt Algebra I.

3. Aufgabe Abelsche Erweiterungen

(4 Punkte)

Zeige, dass eine normale Erweiterung K über $\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 3$ existiert und gib ein Beispiel an für solch einen Körper.

4. Aufgabe Galoisgruppe eines Polynomes

(6 Punkte)

Sei $f(t) = t^4 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$. Bestimme zu sämtlichen Untergruppen H von $G(f, \mathbb{Q})$ ihre Fixkörper im Zerfällungskörper $E/\mathbb{Q}$ von f .

Hinweis: Es gilt $G(f, \mathbb{Q}) \cong D_4$. Die D_4 besitzt 5 Untergruppen der Ordnung 2 und 3 Untergruppen der Ordnung 4. Weiterhin ist

$$D_4 = \{\sigma^i \tau^j \mid 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1\}$$

mit $\tau\sigma = \sigma^3\tau$, wobei σ die Ordnung 4 und τ die Ordnung 2 hat. Die nicht-trivialen Untergruppen sind von der Gestalt

$$U_1 = \{id, \sigma^2\}, \quad U_2 = \{id, \tau\}, \quad U_3 = \{id, \sigma\tau\}, \quad U_4 = \{id, \sigma^2\tau\}$$
$$U_5 = \{id, \sigma^3\tau\}, \quad U_6 = \langle\sigma\rangle, \quad U_7 = \{id, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\} \quad \text{und} \quad U_8 = \{id, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}.$$