Technische Universität Berlin Wintersemester 05/06
Prof. Dr. F. Hess
M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2

7. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Fixkörper und Galoiserweiterungen** (4 Punkte)

(a) Sei E/K eine algebraische Erweiterung. Zeige, dass

(i) $\mathcal{F}_{E/K} \circ \mathcal{G}_{E/K} \circ \mathcal{F}_{E/K} = \mathcal{F}_{E/K}$ und

(ii) $\mathcal{G}_{E/K} \circ \mathcal{F}_{E/K} \circ \mathcal{G}_{E/K} = \mathcal{G}_{E/K}$

gilt.

(b) Es sei E/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galois-Gruppe G und $E = K(\alpha)$. Ferner sei $H \leq G$ und

$$f(t) = \prod_{\sigma \in H} (t - \sigma(\alpha)) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i t^i.$$

Zeige, dass $\mathcal{F}_{E/K}(H) = K(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ ist.

2. Aufgabe **Separable und inseparable Körperweiterungen** (3 Punkte)

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(i) Sei E/K normal und $G = \mathrm{Aut}_K(E)$. Dann ist E^G/K der rein inseparable Abschluss von K in E und $[E^G : K] = [E : K]_i$.

(ii) Sei E/K algebraisch und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K mit F_1/K normal und F_2/K separabel. Es gelte $F_1 \cap F_2 = K$. Dann sind F_1 und F_2 linear disjunkt über K.

3. Aufgabe **Unendliche Galoiserweiterungen** **(3 Punkte)**

Sei $K := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{l^i}}$ mit p, l Primzahl. Dann ist K eine unendliche Galoiserweiterung von $\mathbb{F}_p$. Ferner sei eine l-adische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k l^k$ mit $\lambda_k = 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben und $a_n := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k l^k$. Wir definieren nun ein Abbildung $\tau : K \to K$ mit $\tau(x) = x^{p^{a_i}}$ wenn $x \in \mathbb{F}_{p^{l^i}}$ wobei i minimal ist. Wir wissen bereits, dass τ ein Automorphismus von K ist. Zeige

(a) $\tau \in \overline{\langle \sigma \rangle} = \mathcal{G}_{K/\mathbb{F}_p} \circ \mathcal{F}_{K/\mathbb{F}_p} (\langle \sigma \rangle)$

(b) $\tau \notin \langle \sigma \rangle$.

4. Aufgabe **Praktische Aufgabe** **(6 Punkte)**

Schreibe in KASH3 einen Algorithmus der die Galoisgruppe $G(E/K)$ einer endlichen Erweiterung $E/K \subseteq \mathbb{C}$ mit $[E : K] = n$ als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n darstellt. Benutzt euren Algorithmus vom 3. Aufgabenblatt zur Berechnung der Galoisgruppe.

Hinweise: Die praktische Aufgabe kann bis zum 14. Dezember abgegeben werden.