Technische Universität Berlin Wintersemester 05/06
Prof. Dr. F. Hess
M. Wagner
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2`

6. Übung Algebra II

1. Aufgabe **Spur, Bilinearformen und Dualräume** **(4 Punkte)**

Sei E/k eine endliche separable Erweiterung eines Körpers k mit $\mathrm{Char}(k) = p$ und $p \nmid [E : k]$.

(a) Zeige, dass die Abbildung
$$(x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}_{E/k}(xy) \tag{1}$$
von $E \times E \to k$ eine Bilinearform ist und E mit seinem Dualraum identifiziert.

(b) Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von E/k. Zeige, dass dann eine Basis $b'_1, \ldots, b'_n$ von E/k existiert, so dass $\mathrm{Tr}_{E/k}(b_j b'_i) = \delta_{ij}$ gilt. Hierbei ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol.

2. Aufgabe **Diskriminanten von Basen** **(3 Punkte)**

Es sei E/k eine endliche Erweiterung. Für eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von E/k definieren wir die Diskriminante von $b_1, \ldots, b_n$ durch
$$D(b_1, \ldots, b_n) := \det \left(\mathrm{Tr}_{E/k}(b_i b_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{2}$$
Zeige, dass $D(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ genau dann gilt, wenn E/k separabel ist.

3. Aufgabe **Automorphismen** **(4 Punkte)**

(a) Sei $K = \mathbb{F}_{p^n}$ gegeben mit p Primzahl und $G := \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(K)$. Ist G zyklisch? Wenn ja, welche Ordnung hat G? Gib einen Erzeuger an.

(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Zeige, dass $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ gilt.

4. Aufgabe **Transitivität von Norm und Spur** **(5 Punkte)**

Sei E/K eine endliche Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper von E/K. Ferner sei $a \in E$. Zeige, dass

(a) $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = \mathrm{Tr}_{F/K}\big(\mathrm{Tr}_{E/F}(a)\big)$ und

(b) $\mathrm{N}_{E/K}(a) = \mathrm{N}_{F/K}\big(\mathrm{N}_{E/F}(a)\big)$

gilt unter Verwendung von Lemma 1.51 im Skript:
Sei F Zwischenkörper der algebraischen Erweiterung E/K und sei C ein algebraischer Abschluss von E. Dann gibt es eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_K(F, C) \times \mathrm{Hom}_F(E, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E, C).$$