

4. Übung Algebra II

1. Aufgabe Separabler Abschluss

(5 Punkte)

- (a) Sei $k = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $K = k(t)$ eine einfach transzendente Erweiterung von k . Berechne den separablen Abschluss F von K in folgenden Körpern E . Wie sieht jeweils $[E : K]_s$ aus?
- (i) $E = K(\alpha)$ mit α ist Nullstelle von $f(x) = x^{50} + tx^{15} + t \in K[x]$.
 - (ii) $E = K(\alpha)$ mit α ist Nullstelle von $f(x) = x^{24} + tx^5 + t \in K[x]$.
- (b) Sei K wie in (a) und E ein Erweiterungskörper von K mit $[E : K] = n$. Zeige, dass wenn $\text{char}(K)$ den Grad n von E über K nicht teilt dann $[E : K]_s = [E : K]$ ist.

2. Aufgabe Diskriminanten

(4 Punkte)

Es sei E/K eine endliche Erweiterung vom Grad n mit K -Basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ und $a_i \in E$. Ferner besitze $\text{Hom}_K(E, C)$ genau $m \leq n$ verschiedene Elemente σ_i mit $i = 1, \dots, m$ wobei C ein algebraischer Abschluss von E ist. Mit $a_i^{(j)}$ bezeichnen wir das Element $a_i^{(j)} = \sigma_j(a_i)$.

- (a) Zeige, dass m ein Teiler von n ist.
- (b) Wir betrachten die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(m)} \end{pmatrix} \in C^{n \times m}$$

und definieren nun die Matrix

$$M = \underbrace{(T, \dots, T)}_{\frac{n}{m} \text{ mal}}.$$

Wir definieren nun $D(a_1, \dots, a_n) := \det(MM^t) \in C$. Zeige, dass E/K genau dann separabel ist wenn $D(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ gilt.

Hinweis: Ist $a \in E$ ein primitives Element von E/K so betrachte die Vandermonde-matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a^{n-1})^{(1)} & (a^{n-1})^{(2)} & \dots & (a^{n-1})^{(n)} \end{pmatrix} \in C^{n \times n}$$

mit $\det(V) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (a^{(k)} - a^{(i)})$.

3. Aufgabe Vollkommene Körper

(3 Punkte)

Sei k ein vollkommener Körper mit $\text{char}(K) = p > 0$, $K = k(x, y, z)$ und

$$F = K(z^{p^{-2}}, z^{p^{-2}}x^{p^{-1}} + y^{p^{-1}}).$$

Die Elemente x, y und z seien jeweils transzendent über k und algebraisch unabhängig, d.h. es existiert kein $f \in k[x_1, x_2, x_3]$ mit $f(x, y, z) = 0$. Zeige, dass

$$K^{p^{-1}} \cap F = K(z^{p^{-1}})$$

gilt wobei $K^{p^{-1}} = \{k^{p^{-1}} \mid k \in K\}$ ist.

4. Aufgabe Separabel und rein inseparabel

(4 Punkte)

Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und F_1/K und F_2/K Zwischenkörper von E/K . Sei F_1/K der separable Abschluss von K in E und F_2/K der rein inseparable Abschluss von K in E . Zeige, dass F_1 und F_2 linear disjunkt über K sind und $E = F_1F_2$ gilt.

Hinweis: Benutze ohne Beweis, dass E/F_2 separabel ist.