

3. Übung Algebra II

1. Aufgabe Normale Erweiterungen

(4 Punkte)

Betrachte die Erweiterungen

(i) $E_1/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$,

(ii) $E_2/E_1 = E_1((1+i)\sqrt[4]{5})$ und

(iii) $E_3/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}((1+i)\sqrt[4]{5})$.

a) Welche der Körpererweiterungen sind normal?

b) Sei E/K eine Körpererweiterung und L ein Zwischenkörper. Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel: Wenn sowohl E/L als auch L/K normal sind dann ist auch E/K normal.

2. Aufgabe Zerfällungskörper

(3 Punkte)

Bestimme den Grad $[E : \mathbb{Q}]$ der Zerfällungskörper folgender Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^6 + 1, \quad x^5 - 1 \text{ und } x^4 + 1.$$

3. Aufgabe Endomorphismen von Körpererweiterungen (3 Punkte)

Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Der Satz 1.40 im Skript sagt aus, dass $\text{End}_K(E) = \text{Aut}_K(E)$ ist. Gib ein Gegenbeispiel für die Aussage an wenn man nur die Voraussetzung E ist Körpererweiterung von K macht.

4. Aufgabe Praktische Aufgabe

(6 Punkte)

Seien K_1 und K_2 Zahlkörper und isomorph mittels $\sigma \in \text{Hom}(K_1, K_2)$. Ferner seien E_1/K_1 und E_2/K_2 einfache algebraische Erweiterungen. Schreibe einen Algorithmus, der alle Fortsetzungen $\tau \in \text{Hom}_\sigma(E_1, E_2)$ berechnet.

Betrachte dazu folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tau} & E_2 \\ | & & | \\ K_1 & \xrightarrow{\sigma} & K_2 \end{array}$$

Der Algorithmus soll als Eingabe K_1, K_2, E_1, E_2 und σ erhalten. Für die Abbildungen wird ein Typ **Hom** und eine Funktion **ApplyHom** in der Datei Hom.g auf der Algebra2-Homepage vorgegeben. Eure Abbildungen müssen also vom Typ Hom sein. Wenn ihr Abbildungen hintereinanderausführen wollt, so benutzt ihr die Funktion ApplyHom. Das selbe gilt für Elemente aus Körpererweiterungen.

Die Körper E_1, E_2, K_1 und K_2 werden in KASH3 durch den Befehl **NumberField** erzeugt. Für die Erweiterungen E_1 erwartet der Algorithmus ein $f_1 \in K_1[x]$. (Dies beinhaltet also auch Relativerweiterungen). Mit dem Befehl **Factorization** könnt ihr Polynome faktorisieren. In der Datei Hom.g ist ein kleines Beispiel vorgegeben.

Achtung: Die praktische Aufgabe kann bis zum 16.11.05 bearbeitet werden.