Technische Universität Berlin Wintersemester 05/06
Prof. Dr. F. Hess
M. Wagner
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra2

2. Übung Algebra II

1. Aufgabe Algebraische Körpererweiterungen (4 Punkte)

(a) Es seien p, q Primzahlen mit $p \neq q$ und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{q})$. Zeige, dass

(i) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{q})$ und
(ii) $[L : \mathbb{Q}] = 6$

gilt.

(b) Zeige, dass $a = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$ Wurzel des Polynomes $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist. Welchen Grad hat $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$?

(c) Es sei $a_n \in \mathbb{C}$ eine Wurzel des Polynomes $x^n - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und sei $L := \mathbb{Q}(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ algebraisch ist und $[L : \mathbb{Q}] = \infty$ gilt.

2. Aufgabe Einfache Transzendente Erweiterungen (3 Punkte)

Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung und $L(t)$ und $K(t)$ seien jeweils einfache transzendente Erweiterung. Man zeige für die rationalen Funktionenkörper

$$[L(t) : K(t)] = [L : K].$$

3. Aufgabe Translation und Kompositum (4 Punkte)

Sei E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper. Beweise oder widerlege:

(a) Ist F_1/K transzendent und F_2/K algebraisch, so ist F_1F_2/F_2 transzendent. Dies gilt auch für beliebiges F_2/K.

(b) Eine K-Basis von F_1 ist immer ein F_2-Erzeugendensystem von F_1F_2/F_2.

(c) Sei L ein weiterer Zwischenkörper mit $F_2 \subseteq L$. Dann sind äquivalent:

(i) F_1 und L sind linear disjunkt über K.
(ii) F_1 und F_2 sind linear disjunkt über K und F_1F_2 und L sind linear disjunkt über F_2.

4. Aufgabe **Praktische Aufgabe** **(5 Punkte)**

Es sei $E = \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ eine einfache Körpererweiterung und $\beta \in E$. Schreibe einen Algorithmus, der das Minimalpolynom von β berechnet. Der Algorithmus soll ein irreduzibles Polynom und ein Element β als Eingabe bekommen. Als Ausgabe erfolgt das Minimalpolynom von β.